Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **II**, 4.

SUR
L'ORIGINE DE L'ALGÈBRE

PAR

H. G. ZEUTHEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1919

I.

De nos jours, les recherches algébriques se font au moyen d'un système de symboles représentant, par lettres, des quantités quelconques et, par signes, les opérations auxquelles on soumet les quantités. L'histoire du développement de ce système et de l'extension successive du domaine auquel on l'a appliqué présente certainement beaucoup d'intérêt. L'emploi d'un tel système fut préparé par l'usage de certaines abréviations dans la langue courante. Déjà Aristote se sert de lettres pour représenter des quantités quelconques, Diophante fait usage de certaines abréviations pour la représentation, non seulement d'une quantité inconnue, mais aussi de ses puissances aux exposants $-6 \ldots + 6$ — comme on dirait de nos jours —, et il exprime l'addition par une juxtaposition, la soustraction par un signe particulier. L'emploi de signes se généralisa vers la fin du moyen âge. En systématisant l'usage croissant des différents symboles, Viète composa une *Logistica speciosa* capable d'exprimer les différents calculs exécutés sur des quantités quelconques comformément à des règles bien déterminées. Indirectement, Viète suppose pourtant encore que les quantités soient rationnelles; car ses signes d'opération représentent des calculs qui n'étaient définis que pour de telles quantités. Voilà pourquoi il ajoute à l'emploi de ses règles des démonstrations qu'il appelle géométriques, et dont la généralité est une conséquence de celle de la théorie des proportions établie par Eudoxe. Descartes évite les renvois réitérés en donnant aux opérations exprimées par les symboles des définitions généralisées qui se rattachent directement à la théorie des proportions. Plus tard, on les a généralisées ultérieurement en appliquant les mêmes symboles à des quantités négatives et imaginaires et même à des opérations mathématiques d'un ordre plus élevé.

L'introduction successive et le développement historique des différents symboles mériterait bien de faire objet d'un exposé particulier.[1] Cependant, pour bien comprendre le besoin qui a conduit à la création de tels symboles et au développement ultérieur de leur emploi, il faut commencer par se rappeller la connaissance antérieure des opérations elles-mêmes pour lesquelles on essayait de créer un nouvel organe, et la généralité qu'on avait déjà su donner à ces opérations en les représentant d'une manière toute différente. L'introduction des nouveaux symboles se rattachait avant tout à la connaissance déjà acquise des équations du second degré. Par sa simplicité, la nouvelle représentation des équations et de leurs solutions en rendait la théorie plus accessible, l'application pratique plus facile. L'usage des mêmes symboles devait donc paraître tout indiqué à ceux qui se proposaient d'étendre la même théorie et d'en tirer de nouvelles conséquences en essayant d'appliquer des procédés semblables à des équations d'ordre supérieur ou d'en trouver de nouveaux qui y fussent plus applicables.

[1] Les nombreuses analyses qu'on doit à la plume de M. Eneström portent à croire que, par ses connaissances spéciales des faits que doit contenir un tel exposé, il serait excellemment qualifié pour entreprendre cette tâche.

En même temps qu'on introduisait les nouveaux symboles, on gardait pourtant certaines dénominations, qui rappellent les moyens dont on s'était servi jusqu'alors pour représenter les opérations et obtenir les vérités qu'on avait connues et démontrées avant de penser à se servir d'un nouvel organe. L'usage algébrique d'appellations telles que carrés, cubes et les noms hypergéométriques de puissances supérieures montre que l'algèbre déjà connue qu'on allait symboliser d'une manière nouvelle s'était servie jusqu'alors de symboles géométriques, comme cela a lieu dans l'ancienne mathématique grecque, et ce que nous avons dit de VIÈTE et de DESCARTES montre qu'en apprenant mieux la géométrie de l'antiquité on y avait encore recours pour donner à l'usage des nouveaux symboles la même précision et généralité qu'on trouvait et admirait chez les anciens auteurs.

C'est de l'algèbre ancienne, connue avant l'invention des symboles algébriques modernes, que je vais parler ici. C'est aussi à elle, mais nullement à sa première origine que remonte le mot algèbre. On sait que ce nom de notre science est emprunté au titre: *Al-dschebr w'al-mukâbala* du premier traité d'algèbre arabe, celui d'AL-CHWÂRIZMÎ, et qu'il désigne les deux opérations, dont on devait faire usage pour donner à une équation la forme à laquelle s'appliquent les règles relatives à la solution d'une équation du second degré. AL-CHWÂRIZMÎ ne s'occupe pas d'ailleurs de ces deux opérations, préscrites déjà par DIOPHANTE, et que leurs noms particuliers désignent comme ayant été familières aux géomètres arabes, car il ne trouve pas même nécessaire de les expliquer dans son livre. Par contre, il donne des règles précises pour la solution des différentes formes d'équations du second degré, qu'il illustre par des exemples numériques, et il y joint des démonstrations des règles énoncées. Les équations et les règles sont exposées en paroles, et l'auteur ne fait pas même usage des abréviations de Diophante, mais les démonstrations sont faites, comme dans l'ancienne géométrie grecque, au moyen de figures contenant des rectangles et carrés qui représentent des produits de deux quantités différentes ou égales.

L'algèbre d'al-Chwârizmî, qu'il applique ensuite à la solution de questions auxquelles les lois de succession arabes donnaient lieu, ne diffère donc aucunement de celle que possédaient déjà les Grecs.[1] Néanmoins on a regardé longtemps son œuvre comme l'origine de l'algèbre, science qui lui doit son nom. Cela vient de ce que, au moyen-âge, l'algèbre de l'Occident était une continuation de celle des Arabes, dont du reste le développement ultérieur avait également été influencé par des suggestions dues à l'étude des mathématiciens grecs. Plus tard, les savants de la Renaissance voyaient bien que les auteurs grecs de l'antiquité étaient déjà en possession des procédés servant à résoudre les équations du second degré, et qu'ils savaient les employer dans leurs recherches géométriques; mais, dans la suite, et à mesure qu'on s'accoutumait à regarder l'algèbre comme inséparable de la symbolisation moderne, on inclinait à regarder les procédés, exposés sous forme géométrique par les anciens auteurs, comme des méthodes géométriques grâce auxquelles ces auteurs auraient bien su obtenir dans la géométrie la même chose que nous offre à présent un emprunt à l'algèbre, mais dont les mêmes auteurs auraient

[1] Qu'elle soit due à des traditions grecques contenues dans des écrits que nous possédons encore ou qui sont perdus, c'est ce que M. Cantor démontre d'une manière plus détaillée aux pp. 723—726 de ses Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik I (3e édition).

— pensait on — ignoré l'application aux équations numériques.

Ce fut donc presque une découverte quand Nesselmann constata (Die Algebra der Griechen, 1842) que l'emploi numérique d'équations du second degré était parfaitement familier à Diophante. Depuis, M. Cantor a montré la même chose pour Heron, et Paul Tannery a observé que l'étude d'Euclide, dans son livre X, sur l'irrationalité des quantités déterminées par des équations du second degré, montre qu'il visait aussi les équations numériques. Euclide connaissait donc très bien cette application de procédés, que néanmoins dans ses Éléments il n'expose que sous forme géométrique et d'une manière très généralisée.

Cependant, cette succession des découvertes historiques relatives aux connaissances des Grecs a porté à attribuer un ordre semblable à leur propre acquisition de ces connaissances. On a cru que pour les Grecs eux-mêmes le développement de la théorie géométrique et les applications géométriques avaient été le but primordial, et que la solution d'équations numériques était pour eux une heureuse application dont on ne découvrit que plus tard la possibilité. Alors le développement aurait été l'inverse de ce que nous rencontrons ordinairement dans l'histoire des mathématiques. On commence presque toujours par inventer des procédés servant à résoudre quelques problèmes particuliers qui se présentent d'eux-mêmes; on en aperçoit de nouvelles applications, et on s'élève ainsi peu à peu à en reconnaître la portée et ensuite à donner un exposé bien établi de la méthode générale — ce n'est que la postérité qui croit voir dans le début de cette méthode la véritable source de la connaissance de toutes les vérités qu'on en peut déduire. Qu'un tel développement puisse s'étendre sur des siècles, c'est ce que montre celui de la symbolisation moderne de l'algèbre. Utilisée d'abord dans les équations numériques, dont on avait appris la solution par l'intermédiaire des Arabes, et employée ensuite pendant la Renaissance à la solution de questions plus élevées que celles dont s'étaient occupés les anciens, ce n'est que dans la Géométrie de Descartes qu'elle s'élève à une généralité et une rigueur comparables à ce qu'on avait connu dans la représentation géométrique d'Euclide. Ce serait sans doute méconnaître l'état de la science caractérisé par ces propriétés que de croire que l'algèbre ancienne aurait pu naître sous une forme aussi élevée pour n'être qu'ensuite appliquée à des questions plus simples. L'excellence de la forme doit être au contraire le résultat d'un long développement commencé par des recherches plus ou moins fortuites et faites de points de vue moins abstraits; ces recherches antérieures ont dû ressembler à celles d'al-Chwârizmî, beaucoup plus que ne font les propositions générales d'Euclide.

En réalité, la forme générale sous laquelle Euclide énonce et expose la solution des équations du second degré dans son livre VI, 27—29, est le résultat d'une transformation d'une algèbre plus ancienne, transformation qui devait accompagner la réforme générale qu'a subie la mathématique dans l'époque de Platon à Euclide; c'est du moins ce que j'ai tâché de montrer dans un mémoire sur cette réforme, publié en 1917[1]. J'y fais voir que dans la nouvelle géométrie scientifique on remplaçait, par la construction bien définie des figures déplacées, la simple transposition intuitive

[1] Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Euklid blev rationel Videnskab. Avec un résumé en français (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres du Danemark, 8e série, Section des Sciences t. I no 5 (1917)). Dans ce qui suit, je citerai ce travail comme mon »Mémoire sur la Réforme«.

de rectangles et de carrés qui avait servi déjà avant cette époque à symboliser les opérations algébriques de la même manière qu'elle le fait encore dans le livre d'AL-CHWÂRIZMÎ, et qu'on généralisait ultérieurement les figures en substituant aux rectangles et aux carrés des parallélogrammes à angles donnés, ou semblables à un parallélogramme donné. La nature de cette transformation de l'algèbre ressort du mémoire cité; mais de même que plusieurs autres transformations particulières elle aurait mérité de faire, dans un chapitre particulier, l'objet d'une étude plus détaillée. Et c'est pourquoi j'y reviens ici. Le but du présent travail est 1° de signaler les opérations qu'on savait exécuter pratiquement avant la réforme en question, et 2° de rendre compte du travail qu'on a dû exécuter soit pour en faire l'algèbre scientifique et générale sous forme géométrique qu'on trouve dans les Éléments d'EUCLIDE, soit pour la développer ultérieurement.

Nous espérons par ce travail continuer les efforts des historiens modernes de la mathématique, en particulier ceux de PAUL TANNERY, pour établir un rapport de liaison entre la géométrie classique des Grecs et l'algèbre de DIOPHANTE. En même temps, nous croyons ainsi réfuter la conception qui regarde l'algèbre arabe comme une véritable innovation, ce que fait encore M. P. BOUTROUX.[1] L'algèbre arabe avait commencé par faire usage des procédés que les Grecs possédaient déjà avant l'ère platonicienne; elle s'était développée ensuite en s'appropriant successivement les vues des grands auteurs scientifiques de la Grèce, ce qui ne veut pas dire pourtant que pendant leur travail d'habiles continuateurs les Arabes ne soient pas parvenus à exprimer

[1] Dans son intéressant ouvrage intitulé: Les Principes de l'Analyse mathématique, exposé historique et critique, I, Paris 1914.

les pensées déjà cultivées par les Grecs d'une manière qui à pu préparer les véritables progrès qui font ensuite l'honneur de la Renaissance.

II. L'arithmétique et l'algèbre avant Platon.

La revendication pour les Pythagoriciens d'une algèbre comprenant au moins la solution d'équations numériques du second degré appartient à Paul Tannery, qui a allégué de bonnes raisons en sa faveur dans son Mémoire intitulé: De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide.[1] Si je crois y pouvoir ajouter encore quelque chose, ce sera en m'occupant de la différence de vues et d'objectifs qui sépare la pratique des plus anciens mathématiciens et la conception scientifique d'Euclide.

Paul Tannrry dit (p. 269 des Travaux scientifiques I): »Les quatre premiers livres (d'Euclide) représentent, comme fond et comme forme, la matière élaborée avant Eudoxe, les deux suivants supposent le travail de ce dernier, mais comme forme seulement, car il n'est pas douteux que la totalité des théorèmes qu'ils renferment n'aient dû être connus bien auparavant, sinon rigoureusement démontrés en dehors de l'hypothèse de la commensurabilité.« Les lecteurs de mon mémoire sur la Réforme sauront que je n'accepte pas une telle distinction entre les différentes parties d'Euclide, dont l'ordonnance est plutôt dictée par des considérations scientifiques que dues à des raisons historiques. Certainement je crois, moi aussi, que pratiquement les opérations algébriques ont été rattachées dès leur origine aux symboles géométriques; mais l'ancienneté de la nomenclature géométrique de l'arithmétique grecque, l'emploi arith-

[1] Mémoire de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux 1882, t. IV; Mémoires scientifiques I, p. 254.

métique par exemple des mots rectangle, carré etc., montre selon moi qu'il n'y faut pas voir l'application aux nombres d'une géométrie déjà faite, mais seulement un essai de créer un moyen de retenir les nombres et les opérations qu'on leur fait subir. Rectangles et carrés sont en effet, malgré leur nature complexe au point de vue logique, les notions intuitives les plus primitives par lesquelles on a commencé la géométrie, qui s'est plutôt développée pour satisfaire des besoins arithmétiques. C'est ainsi que la nature universelle des nombres a pu permettre de faire l'addition numérique d'un rectangle et d'un de ses côtés, ce que font sans scrupule les auteurs des travaux qui portent le nom de HERON et aussi DIOPHANTE, dans leurs exercises numériques, — et ce qu'on a fait probablement dès le commencement: on l'a fait en pensant seulement aux nombres que représentent ces figures, alors que le même emploi aurait constitué une hérésie dans la géométrie scientifique et dans ses applications aux démonstrations de propositions algébriques générales. De même, il est impossible qu'avant PLATON et EUCLIDE les manipulations géométriques dont on se servait pour exprimer la solution d'une équation du second degré, aient abouti à une construction méritant par sa dépendance de postulats expressément énoncés d'être regardée comme fournissant l'exacte valeur d'une racine générale; car les énoncés formels des postulats ne datent que d'un successeur de PLATON, probablement de MÉNECHME, et même l'usage pratique du compas à dessiner, d'HYPSICLÈS. Si, par exemple, EUCLIDE réduit dans II, 5, sous forme géométrique, l'équation

$$ax - x^2 = B, \tag{1}$$

où a et x sont des droites limitées, B la surface d'une figure rectiligne, et où ax et x^2 sont représentés par un rectangle et un carré, à

$$\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-B, \tag{2}$$

nous ne doutons nullement que cela ne soit un emprunt à des connaissances antérieures; mais dans la géométrie scientifique d'Euclide cela fournit le moyen de construire exactement les racines de l'équation donnée. Jusqu'alors, l'équation (2) avait fourni le moyen de calculer les racines de l'équation (1), ou bien les nombres dont la somme sera a et le produit B si les valeurs numériques de a et B sont données. En effet, le calcul de $\left(\frac{a}{2}\right)^2-B$ n'aura alors présenté aucune difficulté, et le calcul approché de ce que nous appelons la racine carrée d'un nombre, a été connu à cette époque depuis longtemps, quels qu'aient été d'ailleurs les moyens employés pour l'exécuter. L'idée de l'irrationalité de racines carrées n'était en effet qu'une réponse à la question de savoir si l'insuffisance des approximations résultait d'une nécessité absolue ou seulement de la défectuosité des méthodes jusqu'alors employées. Il est bien possible toutefois qu'on se soit efforcé de se servir pratiquement de constructions assez bonnes pour remplacer l'extraction approchée d'une racine carrée par quelque détermination d'un segment qu'on pouvait mesurer ensuite; mais on s'est servi alors d'autres instruments qu'Euclide, notamment d'un gnomon matériel au lieu du compas à dessiner (voir mon mémoire sur la Réforme p. 64). Du reste, le mesurage a pu se faire avec une assez grande précision au moyen de la même méthode qui sert à la détermination du plus grand facteur, méthode que connaissaient du moins Théodore et Théétète, et dont l'ancienneté est attestée par le fait que pour la désigner on s'est servi de bonne heure d'un nom particulier: ἀνταναίρεσις ou ἀνθυφαίρεσις (voir Réforme p. 108).

Les sources de nos connaissances de la mathématique préeuclidienne sont d'une part des rapports directs sur son état et même des extraits tels que celui du fragment d'Hippocrate de Chios, et d'autre part des conclusions indirectes que permet la manière dont Euclide et les auteurs suivants traitent les questions mentionnées dans les dits rapports. C'est au moyen de la première catégorie de sources que P. Tannery a établi que la connaissance de la solution d'équations numériques du second degré remonte aux Pythagoriciens. Avec son sens critique ordinaire, il distingue bien entre la valeur des différentes sources[1], et en particulier de celles où Proclus a puisé les renseignements qu'on lui doit. Il est vrai pourtant qu'on n'a pas à présent la même confiance qu'autrefois dans les comptes rendus de Proclus: même dans les cas où il puise aux meilleures sources, on le suspecte de les entremêler de traditions néopythagoriques[2]; mais, selon moi, on méconnaît peut-être la valeur de ces traditions. Bien que ces traditions se rattachent plutôt au mysticisme qu'à la science des anciens Pythagoriciens, l'emploi mystique de faits mathématiques témoigne d'une connaissance antérieure des mêmes faits, connaissance qui devait alors remonter au maître lui-même ou à ses premiers disciples. Ainsi mainte tradition représenterait à la fois l'un et l'autre. L'hésitation qu'on éprouve à attribuer à Pythagore la connaissance de cer-

1) Il y a pourtant un des arguments de P. Tannery auquel je ne puis adhérer. Il rappelle (p. 275 des Mém. sc.) que la construction d'une des lunules d'Hippocrate dépend de la solution géométrique d'une équation mixte du second degré. Or la construction en question est une intercalation (νεῦσις), et il n'y a pas de raison pour croire que déjà Hippocrate eût préféré à une exécution mécanique de cette opération une construction légitime d'après les principes d'Euclide.

2) Voir en particulier Eva Sachs: Die fünf platonischen Körper (Philologische Untersuchungen XXIV, 1917).

taines vérités ou procédés provient aussi, sans doute, souvent de ce fait qu'à présent une telle connaissance nous paraît inséparable de la démonstration euclidienne, que certainement on aurait tort de reporter à Pythagore; mais il ne faut nullement croire qu'à l'origine de la mathématique l'observation des faits et l'invention des procédés ait suivi le même cours que demande leur établissement formel sur les principes adoptés depuis Euclide. Les démonstrations bien formulées ont en général été précédées d'une découverte des faits et des procédés qui ne présupposait au fond que du bon sens intuitif.

Ce sont des connaissances d'ordre arithmétique et algébrique, acquises anciennement de cette manière, que je cherche à tirer des sources indirectes dont je viens de parler. J'ai montré, à la page 62 de mon Mémoire cité sur la Réforme, en quoi a consisté la généralisation de procédés déjà connus qui fait l'objet des démonstrations du livre II d'Euclide et quels ont été par conséquent les procédés analogues dont on disposait avant lui. J'y reviendrai tout à l'heure; mais d'abord je profiterai de l'Arithmétique de Nicomaque pour en tirer des formes encore plus anciennes. Un tel usage d'auteurs comme Nicomaque et Théon de Smyrne me paraît tout indiqué. En effet, dans un ouvrage où il se propose d'exposer les mathématiques nécessaires pour comprendre les endroits mathématiques dans les œuvres de Platon, le dernier de ces auteurs a dû rendre compte de doctrines connues avant Euclide. Et pas plus que lui, Nicomaque ne peut être regardé comme un mathématicien original. C'est particulièrement en parlant de nombres figurés qu'il rend compte de doctrines connues avant lui. On le voit immédiatement dans le chap. 16 de son livre II. En parlant des différentes dénominations de nombres à trois dimensions, il dit que quelques auteurs en emploient une, d'autres une autre. L'emploi des nombres à trois dimensions n'était donc pas nouveau à son époque, et celui des nombres polygonaux plans a dû le précéder. Alors, comme pour cette doctrine il ne fait aucun usage d'EUCLIDE, dont les vues abstraites seraient trop scientifiques pour les lecteurs de NICOMAQUE et de THÉON, il faut croire que leur arithmétique géométrique, qui fait usage de points pour représenter les unités d'un nombre entier, et de l'ordonnance géométrique de ces points pour étudier les propriétés de ces nombres, avait été en usage avant l'algèbre géométrique d'EUCLIDE, qui représente les quantités générales par des longueurs de droites et des surfaces de figures planes. L'idée de cette algèbre géométrique a donc été provoquée par les résultats qu'on avait su obtenir de l'arithmétique géométrique.

L'étendue du système de dénominations de différents nombres plans et solides que nous apprend NICOMAQUE, le rend même probable que les anciens mathématiciens, auxquels on doit originairement la notion de ces nombres, en ont fait des applications plus remarquables que celles qu'il nous communique, et leur usage peut même avoir préparé la véritable étude géométrique des mêmes figures[1]; mais ici nous devons nous borner aux applications les plus simples de nombres plans dont on peut constater plus directement un usage antérieur à l'époque de PLATON et d'EUCLIDE.

Un nombre triangulaire, dont les unités sont représentées par des points ordonnés sur des rangs parallèles contenant respectivement $1, 2, 3, \ldots, n$ points, est leur somme $1 + 2$

[1] Dans une Note intitulée: L'Arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens (Bibliotheca mathematica 5^3 (1904)) je me suis occupé des applications de cette nature.

$+3 \ldots + n$. Il est facile de voir par une juxtaposition de deux triangles de cette nature que la somme est égale à $\frac{1}{2} n(n+1)$. Nicomaque n'énonce pas toutefois directement ce résultat, mais il se réfère à des nombres carrés n^2 et à une espèce de rectangles qu'on appelait hétéromèques, et qu'on forme de n rangs dont chacun contient $n+1$ points; nous écrivons $n(n+1)$. La formation géométrique montre que les différences de deux nombres carrés consécutifs $\left((n+1)^2 - n^2 = 2n+1\right)$ sont les nombres impairs, et que les différences de deux nombres hétéromèques consécutifs $\left(n(n+1) - (n-1)n = 2n\right)$ sont les nombres pairs (Nicomaque II, 19). Les différences sont, en effet, les gnomons formés d'un rang horizontal et d'un rang vertical de la plus grande des figures. Il en résulte que le carré $(n+1)^2$ est la somme des nombres impairs $(1+3+5+\ldots+2n+1)$, le nombre hétéromèque $n(n+1)$, celle des nombres pairs $2+4+6+\ldots+2n$. Comme du reste le rectangle représentant le nombre hétéromèque $n(n+1)$ se compose de deux triangles au côté n, le dernier résultat contient la sommation $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Voilà un minimum de la connaissance et de l'application des nombres figurés qui datent déjà de l'époque des Pythagoriciens. En effet, le neveu de Platon, Speusippe s'en est occupé dans son livre sur les nombres pythagoriques, où il dèsigne aussi les progressions arithmétiques comme connues sous le nom de la première des progressions, ce qui fait aussi supposer la connaissance de progressions géométriques sous le nom de la seconde progression.[1]

Un point où les différents rapports se trouvent unanimes

[1] Voir P. Tannery: Un fragment de Speusippe (Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux (1883) t. V, ou Mémoires scientifiques (I, p. 281—289.

est l'ancienneté de la connaissance du fait que les carrés sont les sommes des nombres impairs; THÉON DE SMYRNE y revient trois fois. C'est de cette connaissance qu'on a déduit la solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ attribuée à PYTHAGORE; il suffit, en effet, d'égaler un gnomon, $(n+1)^2 - n^2$, qui est égal au nombre impair $2n+1$, à un carré impair quelconque r^2. Alors $n = \frac{1}{2}(r^2-1)$, et on obtient la solution $x = r$, $y = n = \frac{1}{2}(r^2-1)$, $z = n+1 = \frac{1}{2}(r^2+1)$. On aura de même la solution que, sans doute à tort, on attribue à PLATON, et qui doit être en tout cas préeuclidienne. On y fait usage d'un gnomon contenant deux rangs de points. Un tel gnomon sera la différence de deux carrés dont nous pouvons dire que les côtés contiennent respectivement $n+1$ et $n-1$ points. Le gnomon contiendra alors $4n$ points, ce que montre immédiatement une figure, tandis que l'algèbre actuelle le constate à l'aide du calcul: $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$. En remplaçant ici n par un carré quelconque r^2 on obtient la solution $x = 2r$, $y = r^2-1$, $z = r^2+1$.

Aux carrés et gnomons formés de points, qui ont suffi ici, EUCLIDE a substitué dans II, 4 et 7 de véritables figures géométriques. Si, pour traduire ces deux théorèmes, qui se rattachent à la même figure, en une formule algébrique moderne, on appelle le côté de l'un des carrés a et la largeur du gnomon b, on voit que les deux théorèmes expriment la même chose que les formules

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2. \tag{1}$$

A l'endroit cité, EUCLIDE, qui vient de démontrer le théorème de PYTHAGORE, introduit et démontre ces deux théorèmes pour en faire usage dans la démonstration de son extension à un triangle quelconque que contiennent les théorèmes (II, 12 et 13) relatifs aux côtés et à la projection d'un côté sur un autre (le théorème du cosinus); l'usage correspond à celui que dans la même démonstration on fait à présent des deux formules (1).

Les propriétés de la figure de gnomon se traduisent aussi, si les côtés sont appellés a et b, par la formule algébrique

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

traduction qui correspond à l'usage qu'Euclide fait de la même figure dans son lemme à X, 28 pour obtenir la solution la plus générale de l'équation pythagorique. En substituant aux côtés d'un rectangle égal au gnomon (que nous venons d'appeler $a + b$ et $a - b$) deux nombres semblables (nombres proportionnels à deux carrés) m^2c et n^2c, on trouve ainsi la solution générale

$$x = mnc, \quad y = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)c, \quad z = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)c. \qquad (3)$$

Cette solution comprend les deux dont nous avons déjà parlé: pour $c = 1$, $m =$ un nombre impair quelconque et $n = 1$, celle qu'on attribue à Pythagore, pour $c = 2$, $m =$ un nombre quelconque, $n = 1$, celle qu'on attribue à Platon. Elles résulteraient de II, 4 en y donnant au gnomon respectivement les largeurs 1 et 2. Néanmoins Euclide démontre dans II, 8 un théorème particulier, dont il ne fait aucun usage lui-même, et dont le seul but a dû être de donner une forme géométrique et plus exacte selon lui à la démonstration dont on s'était servi jusqu'alors pour établir la solution de Platon. Dans la même traduction algébrique que dans notre formule (1) nous avons appliquée aux théorèmes II, 4 et 7, le théorème énonce que

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

En y remplaçant a par un nombre carré, b par 1, on aura la même démonstration que nous venons d'attribuer à l'arithmétique préeuclidienne.

II, 8 n'est pas la seule des dix premières propositions du livre II d'Euclide dont l'unique but visible est de conformer une démonstration connue antérieurement aux principes suivis dans ses Eléments. En effet, Théon de Smyrne nous fait connaître une série de valeurs approchées de $\sqrt{2}$, à savoir $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots$, qui non seulement étaient connues par Platon, mais qui remontent jusqu'aux Pythagoriciens[1]: c'est de leur approximation à $\sqrt{2}$, qu'Euclide donne des démonstrations exactes dans II, 9 et 10. Il ne me paraît pas possible de tirer de ces démonstrations les procédés par lesquels on avait avant lui trouvé la série en question et vérifié son approximation à $\sqrt{2}$. Toutefois les valeurs approchées sont les mêmes qu'on obtient en développant $\sqrt{2}$ en fraction continue. Or nous avons parlé de l'ancienneté de la détermination de la plus grande mesure commune de deux nombres, procédé qu'on peut appliquer aussi à deux quantités représentées par des segments de droites, ce qu'on fera en exécutant géométriquement les soustractions, et on sait que le même procédé conduit au développement en fraction continue. Il est donc probable que c'est par l'application des mêmes procédés au rapport de $\sqrt{2}$ à 1, représenté par celui de la diagonale d'un carré à son côté, qu'on est parvenu à la même suite de valeurs approchées successives. En faveur de cette hypothèse on peut citer le fait que selon Aristote (158b 29) l'identité des »antanairèses« (voir p. 12) de deux rapports » servi plus tard de critère de leur égalité.[2] C'est sans doute d'abord par induc-

[1] Voir le commentaire de Proclus à la République de Platon, ed. Kroll 1901.

[2] Quant à la forme d'une telle application des procédés, on en est réduit toutefois à des hypothèses incertaines. En tout cas, comme dans le développement ordinaire de $\sqrt{2}$ en fraction continue, on a dû invoquer le fait que $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$, ce que montre la figure d'un

tion qu'on a trouvé la loi générale de la formation du convergent $\frac{y_1}{z_1}$ qui suit au convergent $\frac{y}{z}$, $y_1 = y + 2z$, $z_1 = y + z$. C'est l'utilité de tels convergents qu'Euclide démontre dans les propositions II, 9 et 10, qui expriment, sous sa forme géométrique habituelle, que

$$(y + 2z)^2 - 2(y + z)^2 = -(y^2 - 2z^2).$$

Alors, si $y^2 - 2z^2 = \pm 1$, on aura $y_1^2 - 2z_1^2 = \mp 1$, et, à cause de la croissance du numérateur et du dénominateur, l'approximation de $\sqrt{2}$ deviendra de plus en plus fine.

Le but visé par Euclide dans ses propositions II, 8, 9, 10 est donc de montrer combien les principes qui font la base du système géométrique réalisé dans ses Éléments se prêtent bien aussi à la démonstration exacte de vérités arithmétiques qu'il regarde comme trop connues pour qu'il ait besoin de rendre compte de leurs applications numériques. II, 4 et 7 sont introduits à cause de l'usage qu'Euclide va en faire ensuite dans son système géométrique; mais nous avons vu que leur usage arithmétique était bien connu avant lui. Telle doit être la nature de tous les dix premiers numéros du livre II d'Euclide, qui déjà par leur forme font un groupe particulier où l'on ne trouve pas la déduction successive des précédents. 1—3 servent seulement d'introduction; mais 5 et 6 contiennent les démonstrations euclidiennes de transformations algébriques qui ont dû être connues avant Euclide. Nous avons déjà dit que 5 contient, sous forme géométrique, celle que nous exprimons à présent par

gnomon. Si on substitue un convergent $\frac{y}{z}$ à la dernière $\sqrt{2}$, on aura pour la première le convergent suivant $\frac{y_1}{z_1} = \frac{y+2z}{y+z}$. C'est probablement par le même procédé que Théodore a pu démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.., $\sqrt{18}$. Voir mon mémoire: Sur les livres arithmétiques d'Euclide (Bulletin de l'Académie de Danemark 1910).

$$ax - x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

De même 6 contient celle que nous exprimons à présent par

$$ax + x^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Voilà les artifices qui servent à la solution d'équations du second degré, connue déjà par les Pythagoriciens, qui, eux, ont dû la trouver moyennant les mêmes figures dont se sert EUCLIDE, mais sans ses constructions bien formulées de ces figures et des solutions. Tant qu'on se bornait à des cas où a et x sont des nombres entiers, a un nombre pair, on a pu former ces figures avec des points représentant les unités; mais, en rencontrant des équations à racines irrationnelles, on a dû éprouver la nécessité de substituer aux points des figures géométriques dont les côtés représentent des quantités simples, les surfaces, des produits.

Grâce à cet artifice, on a pu résoudre des équations numériques qui se sont présentées, par exemple, à la recherche de deux nombres dont le produit et la somme, ou la différence, sont donnés. On a pu faire cela pratiquement avant de bien formuler les règles pour la formation et la solution des équations. D'ailleurs EUCLIDE ne donne pas encore ici de tels énoncés: il les réserve pour son livre VI, où la théorie générale des proportions lui permet de leur donner une plus grande généralité; mais cela ne l'empêche pas d'en faire déjà une application pratique pour obtenir une solution dont il a besoin avant le dit livre. C'est ainsi que dans la proposition II, 11 il applique II, 6 à la solution de l'équation

$$a(a - x) = x^2,$$

qui donne
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2.$$

Si a est un nombre donné, on en pourra déduire, au moyen d'une valeur approchée de $\sqrt{5}$, une valeur approchée de x; mais Euclide s'en sert pour construire exactement x, a étant alors un segment donné, et il en fait usage dans le livre IV pour construire un pentagone régulier. Peut-être les Pythagoriciens ont-ils su de même construire la racine au moyen du théorème de Pythagore, et ils en ont peut-être fait le même usage pratique sans attacher encore aux constructions géométriques la même importance théorique que leur attribue Euclide.

Euclide nous apprend donc dans son livre II l'une des manières dont les Grecs avaient représenté déjà avant lui les opérations algébriques, en même temps qu'il donne à ces représentations la forme que demandent ses nouveaux principes rigoureux, et dont il va se servir dans la suite de ses Éléments. L'autre organe des opérations algébriques des Grecs est l'usage des proportions, dont Euclide s'occupe de deux manières différentes correspondant à deux définitions différentes. Dans le livre V, il prend les principes d'Eudoxe pour point de départ d'une théorie générale également applicable à des quantités commensurables et incommensurables, théorie qui fait ensuite, dans le livre VI, à côté de l'usage des angles, la base solide de la théorie des figures semblables. Dans le livre VII, un subtil usage d'une définition arithmétique — et par là moins générale — des proportions, fournit à Euclide, qui suit à cet égard probablement des principes inventés par Théétète, une base solide des démonstrations des théorèmes sur la divisibilité des nombres composés, théorèmes nécessaires pour établir rigoureusement, dans le livre X, les critères de la commensurabilité des radicaux.[1] Le fait qu'on avait

[1] Voir mon mémoire sur les livres arithmétiques d'Euclide (Bulletin de l'Académie de Danemark, 1910).

recours aux proportions pour réaliser deux buts scientifiques differents, et d'autre part le nombre des propriétés des proportions qu'on avait à sa disposition, et qu'à ces effets on déduisait rigoureusement de définitions bien formulées, prouve que du moins l'usage pratique des proportions a été familier aux Grecs avant l'époque des dits savants. Probablement on avait originairement démontré une partie de ces propriétés pour les cas où les termes des proportions étaient des nombres entiers, et on les aura généralisés ensuite par induction; mais on a eu un moyen encore plus intuitif pour trouver ces propriétés. En effet, psychologiquement, la conception de la similitude est plus primordiale à l'homme que la notion des proportions, tandis que depuis Euclide la théorie des proportions fait inversement la base logique de l'étude des figures semblables. Avant Euclide, il a été assez naturel de tirer plusieurs des propriétés des proportions de la seule considération de figures visiblement semblables. (Voir la Section IX de mon mémoire sur la Réforme.) En considérant, par exemple, un triangle avec une transversale parallèle à un de ses côtés, on aura été conduit immédiatement à admettre les transformations suivantes d'une proportion (Euclide V, 16—19):

de $$a : b = c : d$$

en $$a : c = b : d$$

ou $$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$$

ou $$a : b = a \pm c : b \pm d.$$

Aux démonstrations de ce genre Euclide a substitué de plus rigoureuses dans son livre V et dans les livres VII—IX. Ainsi il s'est créé des fondements essentiels pour ses propres recherches géométriques; mais en même temps, dans les trois livres arithmétiques comme dans le livre II, Euclide profite de l'occasion pour étendre la même rigueur aux démonstrations d'autres propositions dont on avait fait avant lui un usage arithmétique.

C'est ce qui explique qu'après avoir donné la théorie générale de la divisibilité des nombres composés, dont il avait un besoin immédiat dans son système, il s'occupe, vers la fin du livre IX, particulièrement des nombres pairs et impairs, impairement pairs, etc. et énonce à ce sujet des théorèmes qui paraissent assez triviaux auprès de ceux qui précèdent. La division des nombres en pairs et impairs, à laquelle se joignait de nouvelles catégories suivant la divisibilité par quatre, etc., avait, en effet, depuis Pythagore une grande popularité, et nous apprenons de l'ouvrage de Nicomaque que cette popularité s'est conservée indépendemment des vues plus générales qu'Euclide avait prises avant de s'occuper de cette matière assez spéciale. Il est assez probable que la belle démonstration (IX, 20) de l'infinité de la série des nombres premiers a été également connue avant Euclide. Dans cette hypothèse, ce théorème, dont l'intérêt est purement arithmétique, doit sa place, dans ses Éléments, à la circonstance qu'on y fait usage d'un théorème sur la divisibilisé des nombres qu'Euclide avait dû démontrer rigoureusement (VII, 31).

Une grande place est accordée dans ces livres à la théorie des puissances sous forme de théorie des proportions continues. S'il y a $n+1$ termes dans une telle proportion

$$a : b = b : c = c : d = \ldots = e : f$$

le rapport $\frac{f}{a}$ du dernier terme f au premier terme a sera ce que nous appelons aujourd'hui la $n^{\text{ième}}$ puissance du rapport $\frac{b}{a}$ du deuxième terme b au premier a. Si le premier terme est 1, le second un nombre entier, on aura ainsi les puissances du nombre entier. Inversement, l'extraction de la $n^{\text{ième}}$ racine de $\frac{f}{a}$ est représentée comme l'insertion de $n-1$ termes d'une proposition continue commençant par a et finissant par f. Cette représentation des puissances et des radicaux remonte au moins à HIPPOCRATE de Chios, qui a réduit la duplication du cube à l'insertion de deux moyennes proportionnelles. Il a donc reconnu l'identité des deux manières dont les anciens représentaient une $3^{\text{ième}}$ puissance: 1° géométriquement, comme un cube, 2° au moyen d'une proportion continue à 4 termes. EUCLIDE, de son côté, donne dans ses livres arithmétiques un développement assez étendu de cette théorie des puissances. Néanmoins, dans le livre X, il ne se soucie pas d'en tirer pour les radicaux d'autres fruits que ceux qui sont relatifs aux racines carrées, seules racines dont il ait besoin dans ses recherches géométriques propres, où il se borne aux opérations qui ne demandent que l'usage de la droite et du cercle ou d'équations du second degré; mais la généralité de sa théorie des puissances, et en particulier de ses théorèmes VII, 27 et VIII, 2 lui aurait permis d'étendre aux radicaux de tous les ordres les critères (X, 9) de la rationalité de racines carrées. Aussi voit-on, du dialogue de PLATON qui porte le nom de THÉÉTÈTE, que ce savant s'est occupé de la rationalité de racines cubiques. Il est donc probable qu'une partie, au moins, des résultats relatifs aux proportions continues lui est due; mais sans doute EUCLIDE en a élaboré ultérieurement la théorie.

La fin du livre IX contient une application de la théorie des puissances à la détermination d'un nombre dit parfait, qui semble remonter en partie aux Pythagoriéiens, tandis qu'on y reconnaît aussi une généralisation de la démonstration qui porte plutôt l'empreinte d'EUCLIDE. Est »parfait« selon sa définition VII, 22 tout nombre qui égale la somme de ses parties aliquotes, et le théorème IX, 36 énonce que, dans le cas où la somme $s = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ est un nombre premier, le nombre $s \cdot 2^n$ est parfait. En effet, ses parties aliquotes seront alors

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^n,\ s,\ 2s,\ \ldots,\ 2^{n-1}s,$$

et leur somme

$$s + s(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = s + s(2^n - 1) = s \cdot 2^n.$$

Tout cela peut très bien avoir été connu par les Pythagoriciens. La notion de nombre parfait se rattache à des propriétés qui leur intéressaient, et le nombre 6 en offrait un simple exemple. Nous avons déjà parlé de leur connaissance de séries géométriques. Les puissances du nombre 2 en offraient l'exemple le plus simple, et Philolaus attribue aux planètes des distances du feu central qui sont exprimées par les puissances de 3. Vu que $2^r - 2^{r-1} = 2^{r-1}$, ils ont très bien pu trouver par induction, et voir confirmée ensuite, la règle concernant la sommation des puissances de 2. Alors, en remarquant que le nombre parfait le premier connu 6 peut s'écrire $(1+2)2$, et en essayant d'en trouver d'autres, on a pu être conduit à observer que $28 = (1 + 2 + 2^2)\,2^2$ en constitue un également. En continuant, on aura vu que $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)\,2^3$ n'en est pas un parce que 15 n'est pas premier, mais que $31 \cdot 2^4$ au contraire en est un, et ainsi on peut avoir été amené à établir la règle générale, en partie par les mêmes considérations auquelles nous avons pu donner ici des expressions plus simples qu'il ne leur était possible; mais le défaut de ces moyens modernes a été récompensé par la considération directe des nombres eux-mêmes qu'on a retenue avec plus d'assiduité qu'on n'a besoin de le faire aujourd'hui.

S'il en est ainsi, Euclide a fait ici la même chose que dans son livre II, en faisant dépendre l'établissement d'un résultat arithmétique qui avait déjà une certaine popularité d'un théorème qui découle des vues générales qu'il a dû prendre pour réaliser ses propres buts. Ce théorème (IX, 35), qui est à nos yeux beaucoup plus important que ne l'est la formation de nombres parfaits, exprime la sommation générale d'une série géométrique. Il le demontre de la manière suivante. En appliquant des transformations connues aux proportions

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

on aura $$\frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{b} = \frac{d-c}{c} = \frac{d-a}{a+b+c},$$

et sans qu'EUCLIDE ait eu besoin de le dire expressément, on voit que le même raisonnement peut être appliqué quel que soit le nombre des termes de la série. Dans le cas où $a = 1$, $b = 2$, cette démonstration serait à peu près la même que nous venons d'attribuer aux Pythagoriciens, qui n'ont pas, pour l'effectuer, eu besoin de proportions.

Rappelons encore un exemple qui montre qu'avant d'avoir à sa disposition des moyens techniques propres aux questions dont on s'occupait, on a su se servir de la langue courante pour les exprimer et pour en donner les solutions. Il nous est rapporté que le Pythagoricien THYMARIDAS[1] a exposé les équations que nous écririons

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s, \quad x_1 + x_2 = a_1, \quad x_1 + x_3 = a_2, \ \ldots, \quad x_1 + x_n = a_{n-1}$$

et leur solution

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - s}{n-2}$$

[1] Dans un mémoire inséré aux Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux (1881), t. III p. 101—104 (Mémoires scientifiques t. I p. 106—110) P. TANNERY l'a rendu probable que THYMARIDAS appartenait aux *anciens* Pythagoriciens.

de la manière suivante: Si des quantités [données et] inconnues font une quantité donnée, et que l'une d'entre elles ajoutée à chacune des autres fasse une somme donnée, alors la somme des couples moins la somme donnée appartiendra, totalement dans le cas de trois nombres, de moitié dans le cas de quatre, du tiers dans le cas de cinq, du quart dans le cas de six, etc. à celle qui est ajoutée à chacune des autres.

Nous avons montré qu'avant l'ère platonicienne l'algèbre grecque avait à sa disposition les deux représentations techniques suivantes: 1° les surfaces de rectangles et carrés et 2° les proportions simples et continues, et qu'en manipulant pratiquement les premières on savait résoudre les équations du second degré, et que grâce aux dernières on savait représenter les puissances et les racines. Dans ce qui suit, nous nous occuperons 1° de la généralisation de ces opérations et de leur réduction à des vues plus exactes commencées par les contemporains de Platon, et 2° de leurs applications plus générales continuées aussi après Euclide. Étant donné leur origine, il est évident que la forme plus générale et géométrique qu'on leur donna à cette époque n'a pas fait oublier aux auteurs de ces progrès les applications simples et numériques qu'on peut en faire. Entre leurs mains, ces moyens n'ont donc pas servi seulement à étendre le domaine de la géométrie pure, mais ils sont restés aussi pour eux des instruments servant d'une façon générale à résoudre les questions que nous résolvons à présent au moyen de l'algèbre littérale. C'est pourquoi je regarde ici leur développement comme un développement de l'algèbre, qui se sert de nos jours d'autres symboles.

D'un autre côté, après les Arabes, qui sont à ces égards les élèves immédiats des Grecs, l'adhésion à l'algèbre grecque est rendue plus pénible par les vues abstraites que prend toujours Euclide; c'est l'abstraction de ces vues qui a fait naître chez plusieurs historiens modernes des doutes sur la connexion de l'algèbre géométrique des Grecs avec la connaissance des emplois simples et numériques qu'on en peut faire, connaissance qui pourtant a dû précéder la grande abstraction dont ils marquent le point de départ.

III. Analyse algébrique sous forme géométrique.

Dans mon mémoire sur la Réforme j'ai montré, d'un côté, en quoi a consisté la généralisation et l'abstraction auxquelles on a, pendant l'intervalle de Platon à Euclide, soumis les procédés géométrico-algébriques dont avant cette époque on avait su faire des applications pratiques à des questions particulières. On substituait aux figures servant à marquer pratiquement les opérations et leurs résultats successifs des figures construites conformément à des postulats formellement énoncés, et on donnait à ces figures une généralité géométrique que, du reste, assez souvent les applications algébriques ne demandaient pas. Une généralisation plus importante fut obtenue au moyen d'une théorie générale des proportions, qui conférait aux compositions algébriques qui ne se faisaient pas par la simple formation de rectangles et de carrés cette propriété de pouvoir être appliquées indifféremment aux quantités rationnelles et irrationnelles dont jouissaient immédiatement les résultats de constructions géométriques.

D'un autre côté, je me suis occupé dans le chap. IV du mémoire cité, d'un procédé grâce auquel on a pu réaliser la réforme de la géométrie, et en même temps celle de l'algèbre qui se servait de symboles géométriques: je veux parler de l'*analyse* des notions et des vérités qu'on possédait déjà. Dues en grande partie à l'intuition, celles-ci ne jouissaient pas de la simplicité qu'on doit demander aux points de départ d'un développement logique. Il fallait y appliquer une analyse pour dissoudre les notions et vérités connues en leurs »éléments« jusqu'aux premiers dont on pouvait composer ensuite synthétiquement un système contenant des démonstrations exactes de toutes les vérités géométriques, y compris celles dont on avait déjà eu une connaissance préalable.

Cette analyse ainsi que la synthèse qui la suit sont au fond de la même nature que celles dont on a continué de faire usage ensuite pour réduire des théorèmes dont on n'a encore aucune démonstration formelle à des vérités déjà démontrées (analyse théorique), et des problèmes qu'on n'a pas encore résolus, à des constructions déjà connues (analyse problématique), pour obtenir ensuite synthétiquement, par voie inverse, les démonstrations des théorèmes et les solutions des problèmes proposés. Cette »méthode analytique« qui sert aux progrès ultérieurs de la géométrie déjà bien constituée s'est développée pendant le même espace de temps où s'accomplissait la réforme grâce à laquelle la mathématique déjà existante est devenue science raisonnée. Cette méthode analytique donnait en particulier à l'usage des figures dont on s'était servi jusqu'alors pour représenter le petit nombre d'opérations *algébriques* qui étaient déjà connues, une étendue qui en faisait un utile organe pour de nouvelles recherches algébriques.

Aussi les premières applications de la méthode analytique qui nous soient rapportées ont-elles pour objet des recherches algébriques. En effet, dans le fragment historique inséré par Proclus dans la seconde partie de son Prologue (éd. Friedlein 67, 5—8) on lit qu'Eudoxe de Cnide ταῖς τρισὶν αναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκεν καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ ταῖς αναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος.

ajouta trois nouvelles analogies aux trois anciennes, et fit progresser les questions relatives à la section soulevées par PLATON et pour lesquelles il (EUDOXE) fit usage des *analyses.*

Depuis BRETSCHNEIDER, on croit ordinairement que la section (ἡ τομή) dont il est question ici est la section d'une ligne en moyenne et extrême raison (*sectio aurea*). TANNERY a émis quelques doutes à cet égard[1], auxquelles j'ai adhéré à la p. 36 de mon Mémoire cité. Toutefois, des arguments allégués par Melle E. SACHS[2] m'ont fait changer d'avis, ce que je reconnais dans une note adjointe à mon mémoire (p. 170). Melle SACHS fait aussi valoir plusieurs arguments en faveur de l'hypothèse ultérieure de BRETSCHNEIDER suivant laquelle ce serait du travail d'EUDOXE sur ce sujet qu'on avait extrait la collection d'analyses et de synthèses relatives aux 5 premières propositions du livre XIII d'EUCLIDE qui remplacent dans plusieurs éditions le texte ordinaire[3]. J'aurai l'occasion d'ajouter aux siens plusieurs arguments *pour* et *contre*, que je tire du contenu et de la forme géométrique de ces analyses et synthèses; mais il y a une conclusion que Melle SACHS en tire et à laquelle je ne puis adhérer. Elle croit y voir la première détermination géométrique de cette section, nécessaire pour la construction du pentagone régulier.

En faveur de cette hypothèse elle fait remarquer la

[1] La Géométrie grecque p. 76.

[2] Dans son mémoire cité p. 97. Mes remarques suivantes se réfèrent à la p. 95, note 1.

[3] HEIBERG les a renvoyées à son appendice I. (Éléments t. IV p. 364—377.)

complexité de cette solution dont on aurait pu se passer, selon elle, si l'on connaissait déjà la solution simple du même problème qu'on trouve dans Euclide II, 11. A ce sujet, il faut remarquer d'abord que la construction qu'on tirerait d'Euclide XIII, 1 ou 2 ne différerait pas de celle qu'il a donnée déjà dans le livre II, 11; ce dont on a besoin dans le livre XIII n'est pas la construction, mais l'expression algébrique de la plus grande partie (x) d'une droite (a) résultant de sa section en moyenne et extrême raison, celle qu'à présent nous écrivons $x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$. Euclide la donne en énonçant sous la forme géométrique dont il se sert communément:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Cette relation est une simple conséquence de II, 11 (voir p. 21). Aussi Eudoxe, si c'est bien lui, l'auteur des analyses et synthèses en question, ne se soucie-t-il pas de la déduire, mais seulement de la démontrer au moyen de la méthode analytique. Si la relation avait été entièrement inconnue jusqu'alors, une déduction aurait demandé une analyse problématique; mais l'auteur en a trouvé une démonstration au moyen d'une analyse théorique, et, devant commencer par regarder comme concédé ce qu'il s'agit de démontrer, une telle analyse a demandé une connaissance antérieure du résultat (ou du moins une supposition dont on voulait éprouver la vérité au moyen de l'analyse). Aussi l'analyse conservée est-elle une démonstration que la relation (1), regardée comme concédée, amène la relation

$$x^2 = a(a - x), \tag{2}$$

qui exprime la section de a en moyenne et extrême raison. C'est seulement dans la synthèse suivante qu'on démontre qu'inversement cette dernière relation amène (1).

Tout cela s'accorde du reste très bien avec les expressions employées par PROCLUS, qui ne dit nullement qu'EUDOXE a imaginé la construction de la section, mais qu'il fit progresser les questions y relatives. Ce sont des questions semblables qui font l'objet des quatre autres propositions du commencement du livre XIII.

Le théorème XIII, 2 est l'inverse de XIII, 1. Sa démonstration euclidienne et la synthèse conservée sont donc essentiellement identiques à l'analyse qui avait servi à trouver la démonstration de XIII, 1. De même, la démonstration et la synthèse de XIII, 1 sont identiques à l'analyse appliquée à XIII, 2. Dans le théorème XIII, 3 on établit que si nous désignons par x_1 la plus petite partie de a, ou $a-x$:

$$\left(x_1+\frac{x}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

théorème dont on trouve plus tard une application directe dans XIII, 16, mais d'où résulte aussi, selon 1, la continuation des sections en moyenne et extrême raison, donnant des segments de plus en plus petits. Dans XIII, 4 on démontre que l'équation (2) amène l'équation

$$a^2+(a-x)^2 = 3x^2. \tag{4}$$

Dans XIII, 5 on démontre la continuation des sections en moyenne et extrême raison donnant des segments de plus en plus grands: $a+x$ se décompose par la section en a et x. On montre, en effet, que l'équation (2) amène

$$x(a+x) = a^2. \tag{5}$$

Les démonstrations euclidiennes de 3, 4 et 5 sont essentiellement identiques aux synthèses qui y correspondent dans le fragment attribué à EUDOXE.

Ces théorèmes, de nature algébrique, sont, de même que leurs démonstrations et les analyses et synthèses qui y correspondent, représentés au moyen des symboles géométriques ordinaires: rectangles et carrés, et ce que nous avons exprimé ici par des équations est énoncé comme égalités de surfaces; comme dans le livre II, on se sert de gnomons où il en est besoin pour déduire une égalité d'une autre. Pour l'invention de figures utiles à cet effet, on a été guidé par la connaissance antérieure de l'artifice utile pour résoudre une équation du second degré: c'est ainsi que, dans 1 et 2, on a été conduit à introduire des figures au côté $\frac{a}{2}$. De même qu'on commence de nos jours une recherche algébrique par la formation d'équations, où on peut regarder, à volonté, les différentes quantités représentées par des lettres comme données ou cherchées, on commençait alors par la formation des figures et en faisait un usage parallèle à l'usage actuel d'autres symboles. On avait ainsi une véritable *analyse algébrique sous forme géométrique.*

La collection conservée d'analyses et synthèses relatives aux 5 propositions d'Euclide XIII, doit avoir été déstinée à montrer l'emploi de cette analyse algébrique. Cela ressort déjà de l'introduction, où il est dit (Édition de Heiberg IV, p. 364): L'analyse est la supposition de ce qu'on cherche comme concédé, supposition d'où l'on parvient par ses conséquences à quelque chose dont la vérité est concédée. La synthèse est la supposition de ce qui est concédé; suppo-l'sition d'où l'on parvient par ses conséquences à [la vérité qu'on cherche]. [1]

[1] Il s'est sans doute glissé une erreur dans le texte conservé qui se termine par les mêmes mots que l'explication de l'analyse: επί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. Voir l'édition de Heiberg vol. IV p. 366, 2 et sa note relative à une correction faite par un éditeur antérieur.

Nous avons dit que toutes les analyses ont la forme dite *théorique*, tandis qu'il aurait paru naturel de commencer dans 1 par une analyse *problématique*, conduisant à la solution du problème de la section; les autres propositions sont de véritables théorèmes sur les segments qui résultent de la section. Abstraction faite de la forme, la démonstration donnée par Euclide de son théorème 1, comme aussi la synthèse identique à elle, contient du reste essentiellement ce que devait contenir une telle analyse problématique. Au cas où les analyses et synthèses, comme le supposent Heiberg et Tannery, seraient dues à un scholiaste postérieur, la forme théorique s'expliquerait simplement par le fait qu'Euclide expose toutes les cinq propositions sous forme de théorèmes. Ayant résolu, dans son livre II, une fois pour toutes le problème en question, il n'a pas bésoin d'y revenir; mais son intention évidente est d'avoir à sa disposition, pendant sa détermination suivante des côtés des différents polyèdres réguliers, les propriétés algébriques des segments résultant par la section en moyenne et extrême raison. Les déterminations des côtés poursuivent, en effet, elles aussi des buts algébriques malgré leur forme géométrique, ce qu'on voit par la discussion approfondie de la nature de leurs différentes irrationalités.

On voit donc que le groupe des 5 propositions, de même que le groupe des 10 premières propositions du livre II, est une collection de lemmes algébriques qu'Euclide insère pour en faire usage dans ce qui suit, et, de même que dans le livre II, il ne se borne pas à ceux dont il peut prévoir un emploi immédiat; mais il saisit l'occasion d'en démontrer plusieurs. Dans le livre II, cela s'explique par son désir de donner aussi aux méthodes usitées déjà pratiquement dans l'arithmétique la même rigueur géométrique qu'à ses propres applications de procédés semblables. Dans les emprunts à l'algébre qu'il fait au commencement du livre XIII, il renonce à faire usage des résultats acquis dans ses livres précédents. Cette affirmation ne se rapporte pas seulement à II, 11: au lieu de renvoyer, comme il le fait dans son livre X, toutes les fois qu'il a besoin de la solution d'une équation du second degré, à la solution une fois acquise sous forme de paraboles de surfaces, Euclide construit dans son livre XIII, à chaque fois, le gnomon utile pour effectuer la solution. Les continuations des sections résultant des n^os 3 et 5 sont du reste des conséquences très simples de la théorie des proportions, et elles ont dû se présenter immédiatement au moment ou l'on a fait usage des »antanairèses« (voir p. 12) pour éprouver la commensurabilité d'un segment aux parties résultant d'une section en moyenne et extrême raison, ce qu'on n'a pu négliger, car ce moyen est celui que dans son livre X Euclide prescrit en premier lieu. C'est donc plutôt l'application qu'on y fait des figures servant à l'analyse algébrique que la nouveauté des résultats qui a porté Euclide à insérer cet emprunt à l'algèbre que contiennent les cinq propositions dont nous parlons et à en conserver la forme singulière. Cette forme s'explique dans l'hypothèse d'un emprunt fait à un auteur qui aurait eu pour but principal le développement de l'analyse algébrique sous forme géométrique; si cet auteur possédait une autorité comme celle d'Eudoxe, on comprendrait qu'Euclide ait conservé dans ses démonstrations à très peu près la forme des synthèses d'Eudoxe, ou même, comme on l'a cru, qu'il ait gardé telles quelles toutes les analyses et synthèses.

Même en attribuant les analyses et synthèses à Eudoxe et y voyant, avant tout, des modèles servant à illustrer la méthode analytique, on ne doit pas s'étonner de n'y trouver que des analyses et synthèses »théoriques«. En effet, comme je l'ai montré dans le mémoire sur la Réforme (p. 39), ce fut l'élève d'Eudoxe Ménechme qui introduisit le premier l'usage systématique des problèmes; il n'y avait donc avant lui aucune raison pour distinguer entre analyses théoriques et problématiques. On remarquera aussi que cette distinction n'est pas faite dans les définitions, citées à la p. 34, qui servent d'introduction aux analyses et synthèses en question ici. Au temps d'Eudoxe, l'analyse avait plutôt encore la forme sous laquelle elle se prêtait, appliquée aux vérités déjà connues, à la transformation de l'ensemble de ces vérités en science raisonnée. Nous avons vu, en effet, que l'analyse conservée du théorème XIII, 1 implique une connaissance antérieure de la vérité qu'il énonce.

Quelle que soit la part d'Eudoxe dans ces analyses et synthèses conservées, son usage d'analyses est assez constaté pour nous expliquer l'intérêt qu'il a pris aux »trois nouvelles analogies« que — selon les témoignages concordants de Proclus et quelques autres auteurs — il aurait inventées ou »ajoutées aux trois anciennes«. Les nouvelles analogies sont celles que nous exprimons à présent par

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}, \quad \frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}, \quad \frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{c}.$$

La question arithmétique qui se soulève ici est de trouver des nombres qui satisfassent à ces équations, ce qui se fait algébriquement en les résolvant par rapport à l'une des trois quantités, les deux autres étant données; il s'agit de déterminer celles-ci de manière à ce que les solutions deviennent rationnelles; les solutions entières en résultent alors sans difficulté, les équations étant homogènes.

A la résolution des dites questions algébriques se prête immédiatement l'analyse géométrico-algébrique que nous venons de rencontrer dans les cinq propositions d'Euclide XIII. Il faut commencer par dessiner les figures exprimant les trois proportions, soit les équations

$$a(a-b) = c(b-c),\quad b(a-b) = c(b-c),\quad c(a-b) = b(b-c).$$

Comme on ne connaît pas encore les valeurs des trois quantités, il ne s'agit pas, toutefois, d'une construction exacte, mais seulement de se procurer des dessins auxquels on puisse attacher l'énoncé des équations.

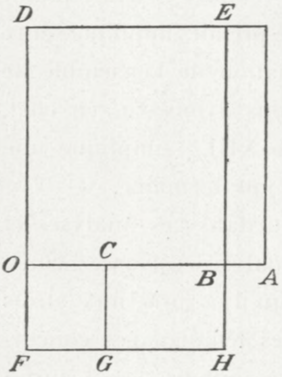

Fig. 1.

On exprimera par excemple la première des trois équations en posant (fig. 1) $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ et en dessinant le carré AD sur OA, et le carré CF sur OC et en prolongeant la droite FG jusqu'à l'intersection H avec la droite EBH perpendiculaire à OA. L'équation demandée s'exprime alors par l'égalité des rectangles AE et CH. La figure montre immédiatement que le rectangle DH est alors égal à la somme des deux carrés, ou bien que

$$b(a+c) = a^2 + c^2,$$

ce qui donne une expression rationnelle de b.

Les deux autres équations étant du premier degré par rapport à a, on en peut aussi déduire les solutions rationnelles demandées; mais il est très probable qu'Eudoxe, lorsqu'il a trouvé les questions dignes qu'on s'en occupe, a résolu aussi les autres questions relatives à la détermination d'un terme, les deux autres étant donnés. Alors l'artifice, déjà bien connu, servant à la solution d'une équation du second degré, a demandé l'introduction de certains rectangles et du carré ayant pour côté la moitié du coefficient de la première puissance de l'inconnue.

Nous ne savons pas jusqu'où EUDOXE est allé dans l'application de ces procédés. Plus tard, on a appliqué, au même effet, les transformations des proportions exprimant les analogies; c'est ce que nous raconte PAPPUS[1]: on s'en servait pour déduire des proportions données des proportions continues, grâce auxquelles on exprimait les termes d'une analogie comme fonctions linéaires et homogènes de trois nombres, t^2, tu, u^2, qui forment une telle proportion. Le procédé appliqué aurait été, lui aussi, à la disposition d'EUDOXE, créateur de la théorie générale des proportions; mais si les déterminations indiquées remontaient à lui, PAPPUS l'aurait dit probablement.

Depuis EUCLIDE l'analyse géométrico-algébrique dont nous parlons ici devait prendre une autre forme. Après lui, il suffisait, en effet, de réduire les nouveaux problèmes à des problèmes résolus et à des théorèmes démontrés dans ses Éléments, et cette réduction était facilitée par ses *Data* dont les propositions, sans contenir des vérités nouvelles, étaient adaptées à cet effet. On n'avait plus besoin, par exemple, de réduire des questions dépendant d'équations du second degré à l'usage direct du gnomon. Cette réduction était faite une fois pour toutes dans ses énoncés des propositions 27—29 du livre VI des Éléments, concernant les paraboles de surfaces. Il est vrai que cela se fait sous une forme généralisée que n'aurait pas démandée l'usage pratique; mais le fait qu'EUCLIDE se contente de réduire à de simples paraboles de surface les nombreuses solutions

[1]) Voir la III^e et la IV^e partie de P. TANNERY: L'Arithmétique des Grecs dans PAPPUS (Mémoires de Bordeaux 1880 t. III ou Mémoires scientifiques Vol. I p. 90—98). Voir aussi PAPPUS ed. HULTSCH I p. 84—105.

d'équations du second degré dont il a besoin dans son livre X, montre bien que l'usage de ces paraboles lui était assez familier. C'est par exception qu'il ne s'y contente pas au commencement du livre XIII, exception qui s'explique si les démonstrations qu'il y donne sont empruntées à Eudoxe. De même, dans l'intéressante solution des équations

$$xy = a, \quad y^2 - mx^2 = b$$

que contient la proposition 86 des *Data* (voir mon mémoire sur la Réforme p. 115), il évite un renvoi direct aux paraboles de surfaces ou, ce qui revient au même, aux propositions précédentes (84 et 85) des *Data*. Toutefois il ne fait aucun usage direct de la figure de gnomon, mais se contente de renvoyer à d'autres propositions précédentes des *Data*, dont l'utilité est précisément démontrée par la proposition considérée.

Nous possédons d'ailleurs de l'époque des premiers Alexandrins un excellent spécimen de la forme que prenait l'analyse algébrique après Euclide, et du soin avec lequel on observait dans les œuvres classiques le détail de cette forme. Je veux parler des deux livres d'Apollonius sur la *section de raison.*[1] Il est vrai que nous ne connaissons cet ouvrage que d'après un texte arabe; mais il paraît probable qu'il y est rendu assez fidèlement et sans additions essentielles; car déjà le fait qu'Apollonius consacre deux livres à un seul problème indique qu'il l'avait traité d'une manière assez circonstanciée. Du reste, l'édition conservée répond bien à la mention que fait Pappus de l'ouvrage original.

Le problème dont il s'agit demande la construction d'une droite passant par un point donné H d'un plan et telle que les segments interceptés entre ses points d'inter-

[1] Halley en a publié une version en latin d'après le texte conservé en arabe (1706).

section avec deux droites AB et CD et deux points fixes des mêmes droites soient entre eux dans un rapport donné; mais il ne faut pas croire qu'Apollonius en cherche immédiatement une élégante construction géométrique (comme le faisait naguère Jul. Petersen dans ses »Méthodes et Théories«): sa solution consiste dans une détermination algébrique des segments en question.

Dans le premier livre, il traite, à côté de cas encore plus simples, celui où l'un des points fixes E est le point d'intersection des deux droites données; c'est là, en effet, un cas auquel il est facile de réduire le cas général, qu'il traite dans le second livre. Les cas sont ultérieurement divisés d'après la situation du point donné et les positions des points d'intersection cherchés sur les droites, car on ne savait pas alors distinguer ces positions entre elles par les signes des segments.

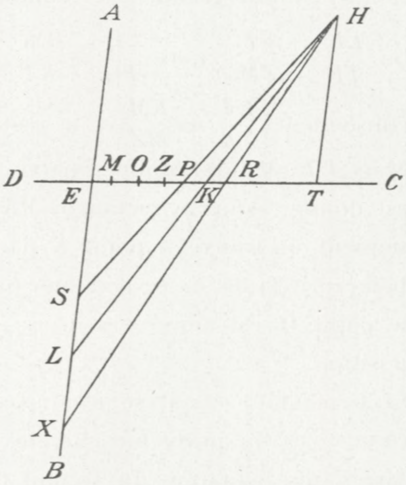

Fig. 2.

Comme spécimen des analyses et synthèses nous communiquerons ici celles qui sont relatives au cas II du »lieu« VI du premier livre (pp. 31—37 de l'édition de Halley). Ce qui caractérise ce cas est, si (fig. 2) HT est parallèle à AB et rencontre CD en T et si le point Z est un point fixe de ET, qu'on cherche les droites HKL rencontrant CD en un point K de ZC et AB en un point L de EB, tels que le rapport $\frac{LE}{ZK}$ ait une valeur donnée. Après cette »ecthèse« Apollonius continue l'analyse du problème, supposé résolu dans la figure, de la manière suivante[1]:

»Soit $\frac{TH}{ZM}$ égal au rapport donné $\frac{LE}{ZK}$; alors, le segment TH étant donné, ZM sera également donné comme grandeur et comme position, et le point Z étant donné, le point M sera aussi donné, et comme T est donné, aussi TM sera donné comme grandeur et comme position. Or $\frac{LE}{ZK} = \frac{TH}{ZM}$, ou $\frac{LE}{TH} = \frac{KZ}{ZM}$, mais $\frac{LE}{TH} = \frac{EK}{KT}$; donc $\frac{EK}{KT} = \frac{KZ}{ZM}$ et, par conséquent, $\frac{ET}{TK} = \frac{KM}{MZ}$ et le rectangle $ET \cdot MZ = TK \cdot KM$. Mais $ET \cdot MZ$ est donné, parce que chacun de ses côtés est donné; donc le rectangle $MK \cdot KT$ est donné. Par conséquent, on trouve le point K par l'application de la »parabole en défaut« de ce rectangle sur la droite TM, et comme le point H est donné, la droite HKL sera donnée comme position.«

Cependant l'analyse n'est pas finie par cette réduction (ἀπαγωγή) du problème cherché à une »parabole«, c'est à dire à une équation du second degré. On a prouvé seulement que le point cherché K, s'il existe, peut être déterminé ainsi. Mais avant de commencer la synthèse, il faut encore 1° savoir si les points K déterminés ainsi se trouvent sur le segment ZT utile pour la solution et 2° s'assurer que la condition de possibilité pour la parabole en défaut à laquelle on a réduit le problème proposé est satisfaite. Voilà ce que fait encore Apollonius dans la partie de

[1] Nous nous servons de quelques signes modernes pour abréger l'exposé verbal d'Apollonius, et nous nous dispensons de citer expressément, comme il le fait, les différentes règles connues pour la transformation des proportions.

l'analyse qu'on a désignée par le nom assez peu significatif de »Révolution.«[1]

»Comme dans la synthèse il faut faire le rapport $\frac{TH}{ZM}$ égal à la raison donnée et appliquer, par une parabole en défaut, $TE \cdot ZM$ sur la droite TM, le point K tombera sur TZ« [car s'il tombait sur ZM, on aurait $KM < ZM$ et $KT < TE$ et par conséquent $KM \cdot KT < TE \cdot ZM$]. »Mais il n'est pas toujours possible de mener la droite cherchée; car si $TE \cdot ZM > \left(\frac{TM}{2}\right)^2$ la parabole en ellipse est impossible« [en effet, selon Euclide VI, 27 $TK \cdot KM$ prendra sa plus grande valeur si K est le milieu de TM].

Apollonius remarque encore que si $TE \cdot ZM = \left(\frac{TM}{2}\right)^2$, la parabole se fera d'une manière singulière. Alors le point cherché K sera le milieu de MT, et on aura $TE \cdot ZM = TK \cdot KM$. »Alors $\frac{ET}{TK} = \frac{KM}{MZ}$ et $\frac{TE}{EK} = \frac{MK}{KZ}$ et, comme $KM = KT$, $\frac{TE}{EK} = \frac{TK}{KZ}$, ou bien $\frac{ET}{TK} = \frac{EK}{KZ}$, et ensuite $\frac{ET}{EK} = \frac{EK}{EZ}$. Le segment EK sera donc la moyenne proportionnelle entre ET et EZ. Or ET et EZ et le point E sont donnés. EK et le point K seront donc donnés eux aussi, et, de même, le point M, parce que $KM = TK$«.

Apollonius fait ensuite la synthèse de cette solution singulière. Avant de passer à celle du cas général, il doit comparer le rapport $\frac{LE}{ZK}$ des segments interceptés sur AB et CD par la droite HKL qu'on a trouvée dans ce cas singulier (pour lequel Apollonius réserve ensuite les notations K, L, M) avec ceux qu'y déterminent d'autres droites passant par H. Il démontre au moyen des propriétés, déjà rappelées,

[1] On trouvera l'énumération des différentes parties dont les anciens composaient l'analyse et la synthèse dans Hankel: Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, et dans mes Leçons sur la même matière.

relatives à la parabole en défaut que le rapport $\frac{LE}{ZK}$ a la valeur minimum, et que les rapports augmentent à mesure que la droite s'éloigne de la position singulière HK.

Après ces préliminaires — dont il est superflu de communiquer ici le détail — Apollonius peut donner la synthèse suivante du problème proposé:

»Soit [HT parallèle à AB et] EK la moyenne proportionnelle entre TE et EZ: menons la droite HK, qui (prolongée) rencontre AB en L. Le rapport donné $\frac{\nu}{\xi}$ peut être $\gtreqless \frac{LE}{ZK}$. Si $\frac{\nu}{\xi} = \frac{LE}{ZK}$, la droite LH satisfera le problème, et il n'y aura qu'elle qui puisse le satisfaire. Si $\frac{\nu}{\xi} < \frac{LE}{ZK}$, le problème n'est pas possible. Mais si $\frac{\nu}{\xi} > \frac{LE}{ZK}$, on fera $KM = TK$; alors on aura [selon ce qui a été prouvé pour la solution singulière] $ET \cdot ZM = MK \cdot KT$, et $\frac{LE}{ZK} = \frac{TH}{ZM}$. Or $\frac{\nu}{\xi} > \frac{LE}{ZK} = \frac{TH}{MZ}$. Si donc nous déterminons O de façon à ce que $\frac{TH}{ZO} = \frac{\nu}{\xi}$, on aura $ZO < ZM$. Mais comme $ET \cdot MZ = MK \cdot KT$ et $MO \cdot ET > MO \cdot KT$ on voit [par soustraction] que le rectangle $OZ \cdot ET < OK \cdot KT$. Il est donc possible d'appliquer ce rectangle sur OT (Parabole en défaut). En exécutant cette parabole des deux côtés de K, on trouve les points P et R. On mène ensuite les droites HP et HR, qui rencontrent AB en S et X. Je dis qu'alors les deux droites HS et HX satisferont le problème, ou bien que $\frac{\nu}{\xi} = \frac{SE}{ZP} = \frac{XE}{ZR}$. En effet, comme $TE \cdot ZO = OP \cdot PT$, on aura $\frac{ET}{TP} = \frac{PO}{OZ}$, et ensuite $\frac{EP}{PT} = \frac{PZ}{ZO}$. Mais $\frac{EP}{PT} = \frac{SE}{TH}$, et par conséquent $\frac{SE}{TH} = \frac{PZ}{ZO}$, ou bien $\frac{SE}{PZ} = \frac{TH}{ZO} = \frac{\nu}{\xi}$. Chacune des droites HS et HX résout donc le problème, et il est clair que plus les droites sont près de *HL*, plus sont petits les rapports qui y correspondent«.

Remarquons d'abord qu'Apollonius connaît parfaitement la duplicité des solutions d'une équation du second degré, bien entendu dans les cas où toutes les deux racines sont positives; car il ne connaît pas plus les solutions négatives qu'imaginaires. Nous avons donc ici un démenti net du préjugé qui veut que les Grecs aient ignoré, ou du moins négligé cette duplicité[1], et qu'en général ils se soient souciés fort peu du nombre des solutions d'un problème. Au contraire, l'importance qu'attachait Apollonius au nombre des solutions possibles, ressort du résumé détaillé, qu'à la fin de son livre I, il fait des nombres de solutions qu'aura son problème pour les différentes positions des droites et points donnés (p. 58—59). Ce résumé embrasse à la fois les solutions, qui pour nous répondraient à des signes différents du rapport donné.

On s'explique du reste très bien pourquoi on ne trouve rien chez Euclide sur la duplicité des racines d'une équation du second degré ou d'une parabole en défaut. Abstraction faite des généralisations qu'on lui doit, il s'agit en effet pour lui comme pour ses prédécesseurs de trouver un rectangle, en connaissant la surface et la somme des côtés, ou un produit, en connaissant la valeur et la somme des facteurs, et ce problème n'a en réalité qu'une seule solution, tant qu'on ne fait aucune distinction entre les deux facteurs ou côtés. Le but visé par Apollonius en introduisant sa parabole, est au contraire de déterminer au moyen d'elle un point d'un segment *OT* dont les deux bouts, *O* et *T*, jouent des rôles différents. Alors on aura des

[1] Paul Tannery réfute le même préjugé par le renvoi à d'autres exemples (Mémoires scientifiques I p. 93).

solutions différentes suivant qu'on fera la section de OT dans l'un ou l'autre des deux points qui décomposent OT en deux segments qui font un rectangle de surface donnée.

On voit du reste combien la subdivision prescrite pour l'analyse et la synthèse est bien faite pour retenir l'attention sur tout ce que demande la discussion complète d'un problème résolu au moyen d'une équation du second degré. La première partie de l'analyse, ἀπαγωγή, contient la réduction à une telle équation. Sa seconde partie n'est pas une anticipation de la première partie de la synthèse, comme le semble indiquer le nom assez impropre de »Résolution« qu'on lui a donné: on y démêle avant tout deux questions qui doivent précéder la synthèse, 1° si par hasard, à côté des conditions exprimées par l'équation à laquelle on a réduit le problème dans la première partie de l'analyse, il en existe d'autres que les solutions cherchées doivent satisfaire en même temps, et, alors, si elles sont satisfaites, elles aussi, par les racines de l'équation, et 2° si la solution de l'équation est possible. De cette façon on découvre comment il faut délimiter les différents cas et les caractériser par des diorismes pour énoncer les problèmes sous une forme qui permette une synthèse utile. Ensuite la première partie de la synthèse contiendra la construction qui fera paraître une multiplicité éventuelle des solutions; sa seconde partie contient la démonstration de la justesse de ces solutions.

Nous avons parlé ici d'équations du second degré parce que les constructions prescrites par Apollonius poursuivent les mêmes buts qu'elles, en se servant seulement d'une forme géométrique pour assurer aux résultats la généralité que comportait la manière dont on avait établi les principes géométriques. Dans cette forme, il ne s'agissait pas de déterminer une quantité inconnue, mais un point ou une »section«[1] d'une droite donnée. Au lieu de proposer une équation à laquelle l'inconnue doive satisfaire, on regardait, dans l'analyse, comme concédée une figure où la section satisfasse aux conditions demandées. La forme géométrique présentait à cet égard une plus grande généralité, parce qu'elle ne demande rien de particulier à l'origine du segment qu'on regarde de nos jours comme l'inconnu, de même que l'usage perpétuel de rapports dispense d'un choix particulier de l'unité. Nous avons vu déjà que la première de ces circonstances a permis de représenter par une seule figure, celle du gnomon, les mêmes choses qu'actuellement on exprime par trois formules, ou bien par deux formules en attribuant des signes aux quantités représentées par une lettre. On aura remarqué aussi que le besoin de signes n'existe pas dans les opérations purement géométriques, où toutefois les figures employées se modifient suivant les situations relatives des différents points soumis à ces opérations. L'opuscule d'APOLLONIUS qui nous occupe montre du reste que cette dernière circonstance a demandé une décomposition assez pénible d'une recherche générale en cas particuliers, décomposition qu'on évite à présent en attribuant des signes aux quantités représentées par les symboles algébriques. Cet inconvénient n'empêche pas d'ailleurs

[1] Ce qui pour nous est la détermination de la racine positive de l'équation $a^2 - ax = x^2$ était pour les Grecs la section du segment a en moyenne et extrême raison. Le titre Περὶ τῆς τομῆς d'un travail d'EUDOXE, dans lequel »la section« n'est pas définie ultérieurement ne pourrait-il pas désigner un traité général d'équations du second degré sous forme de sections? Nous n'avons aucun moyen de répondre à cette question; mais, comme nous l'avons vu, les recherches algébriques d'EUDOXE ont pu en tout cas servir de paradigmes de recherches de cette nature. Nous renvoyons aussi aux titres de trois opuscules d'APOLLONIUS qui indiquent des études de »sections« (τομή ou ἀποτομή).

Apollonius de faire paraître l'uniformité des procédés qu'il applique à des cas diffréents: il la souligne par l'emploi des mêmes expressions lorsqu'il applique la même opération ou le même raisonnement à des figures différentes.

L'opuscule d'Apollonius a donc été bien fait pour apprendre à ses lecteurs et élèves de bien appliquer l'algèbre géométrique à la solution et discussion d'un problème général: elle permet à la fois de montrer la différence des aspects que prendra le problème et la solution dans les différents cas, et de faire paraître la généralité des vues. Un tel usage a demandé l'étude détaillée de divers exemples pratiques, de même que l'habitude de l'analyse algébrique moderne n'est acquise qu'au moyen d'exercises de calcul algébrique. D'après Pappus [1], d'autre opuscules actuellement perdus d'Apollonius ont dû servir à propager cet emploi de la solution d'équations du second degré. Le thème des deux livres sur la *section de surface* n'a différé de celui dont nous venons de parler que par la circonstance qu'on y donne le rectangle au lieu du rapport, formé par les deux segments interceptés sur les droites données. A cause de cette analogie, Apollonius a pu y appliquer, comme nous le rapporte Pappus, la même division en »lieux« et »cas«, ce qui a permis à Halley de restituer cet ouvrage d'une manière dont la correction quant au fond ne saurait être mise en doute; seulement Halley obtient une plus grande brièveté en réunissant dans des exposés plus généraux des cas qu'Apollonius a traité séparément.

Dans les deux livres sur la *section déterminée*, Apollonius s'est occupé du problème de trouver sur une droite donnée contenant quatre points donnés A, A', B, B', un point M tel que le rapport de deux rectangles $\frac{AM \cdot A'M}{BM \cdot B'M}$

[1] Édition de Hultsch pp. 640—645, 670—673.

ait une valeur donnée. Ne s'occupant que des segments d'une droite, ce problème est déjà algébrique et conduira en général à une équation du second degré. Les deux points M qu'elle sert à déterminer, si nous attribuons à la valeur du rapport un signe $+$ ou $-$, feront une couple de l'involution (comme nous disons aujourd'hui) déterminée par les couples AA' et BB'. Ne connaissant pas les signes, Apollonius doit avoir trouvé deux de ces couples si les racines qui y correspondent sont réelles, et l'épreuve de cette réalité (ou possibilité) doit avoir constitué un point principal de sa recherche, qui a contenu — selon Pappus, et correspondant aux différéntes dispositions des points donnés — 8 indications du maximum ou du minimum du rapport donné, c'est-à-dire de valeurs de ce rapport auxquelles correspondent des points doubles de l'involution. Parmi les cas traités ont aussi figuré, selon Pappus, ceux où A et A', ou B et B' coïncident en un point double. Les lemmes que Pappus a trouvé utile d'ajouter [1] montrent qu'Apollonius n'a pas négligé les cas où le rapport donné est égal à un, et où l'équation exprimant la relation proposée sera du premier degré et déterminera le point que nous appelons aujourd'hui le point central de l'involution. Les propriétés exceptionnelles de ce point ont pu, dans l'ouvrage d'Apollonius, ou donner lieu à une division ultérieure en »cas« ou trouver place dans la seconde partie (la »résolution«) de l'analyse des »cas« déjà introduits, à côté des conditions de possibilité.

Quoi qu'il en soit, l'opuscule doit avoir contenu, sous la forme qu'on donnait alors aux équations du second degré, une discussion étendue de la question algébrique que nous exprimerions de nos jours par l'équation

[1] Édition de Hultsch pp. 704—771.

$$x^2 + ax + b + \lambda(x^2 + a_1 x + b_1) = 0,$$

et l'identité effective des problèmes doit avoir amené un parallélisme assez complet des traitements sous différentes formes.

Encore un opuscule d'Apollonius doit avoir contenu, sous la même forme géométrique, des solutions d'équations du second degré. Dans ses deux livres sur *les intercalations* (νεύσεις), il s'occupe du problème de mener par un point donné une droite telle que deux lignes données interceptent sur elle un segment de grandeur donnée. Il s'agissait là de substituer à l'opération mécanique, qui pouvait être bonne pour la pratique, des procédés qui, par le seul usage de lignes bien définies géométriquement, pussent fournir la même rigueur que présentent nos solutions algébriques. Avant tout, on devait connaître les moyens d'exécuter l'intercalation, dans les cas où c'est possible, au moyen de droites et de cercles, ce qui équivaut à une solution par une équation du second degré. Tel est le but d'Apollonius, et par conséquent il a du réduire ces problèmes à des paraboles de surface, qui remplacent chez lui les équations du second degré.

Pappus nous fait connaître les problèmes de cette nature, dont s'occupe Apollonius. Dans l'un de ces problèmes, les lignes données sont des cercles, et le point donné, un de leurs points d'intersection avec la droite passant par leurs centres; il y en a d'autres qui sont, du moins à nos yeux, des cas particuliers du même problème. Au moyen des procédés dont il rend compte dans son ovrage sur *les lieux plans* — opuscule qui précède dans l'énumération de Pappus celui dont nous nous occupons ici — Apollonius a pu réduire ce problème à une équation du second degré.

Dans un autre, le point donné est un des sommets d'un losange tandis que les lignes données sont les côtés qui enferment le sommet opposé. C'est un problème qui a été suggestif pour les mathématiciens de la Renaissance. Tandis qu'il fournit à GIRARD un exemple de l'usage des signes, DESCARTES s'en sert pour illustrer les équations du quatrième degré qui, au moyen de la solution d'une équation du second degré, se décomposent en deux équations du second degré; mais NEWTON a montré que, par un choix heureux de l'inconnue, on peut parvenir immédiatement à une équation de ce degré.[1] Nous possédons de l'antiquité une élégante construction attribuée à un certain HÉRACLITE[2]; mais cette attribution nous indique que son élégance, qui est de nature purement géométrique, n'est pas due à APOLLONIUS. Il est donc probable que dans son ouvrage, destiné à montrer une méthode pour traiter d'une manière générale les problèmes de cette nature, la solution a été obtenue par des considérations moins adaptées à la question géométrique particulière, ou bien par des procédés algébriques; mais alors APOLLONIUS aura su surmonter des difficultés algébriques assez sérieuses, soit que sa solution, traduite dans le langage de l'algèbre moderne eût surtout ressemblé à la solution de DESCARTES, soit qu'elle se fût plutôt rapprochée de celle de NEWTON.

Tout en admettant que, dans les travaux mentionnés ici, on obtient la même chose que nous réalisons actuellement par la détermination d'une quantité cherchée au moyen d'une équation du second degré, et en reconnaissant le parallélisme des procédés exécutés sous des formes diffé-

[1] Voir ma »Geschichte der Mathematik im XVI and XVII Jahrhundert p. 212—214 (Édition danoise p. 299—301).

[2] Kegelschnitte im Altertum p. 281 (Édition danoise p. 182).

rentes, on insistera peut-être encore sur la grande différence que ces formes présentent entre elles, l'une en déterminant une »section« cherchée, l'autre en déterminant une quantité cherchée; mais comme il résulte de ce que j'ai dit plus haut, cette différence dépend plutôt de la manière dont on a essayé d'obtenir une rigueur satisfaisante dans l'application des procédés à des questions générales ou plus abstraites. Après Platon, on cherchait à assurer cette rigueur par les formes géométriques soumises aux suppositions bien formulées de la géométrie; mais ce qui avait intéressé d'abord, et ce dont on avait besoin toujours dans les problèmes concrets, c'était la détermination de quantités inconnues. Pour construire un pentagone régulier, on avait besoin du rapport de son côté à une diagonale; on trouvait que ce rapport serait celui du plus grand segment d'une droite divisée en extrême et moyenne raison à la droite elle-même, ou celui des deux segments entre eux. C'est la détermination de cette quantité inconnue qu'on réduisait à une parabole en excès. Héron sait très bien dans ses *Metrica* appliquer les paraboles à la détermination de quantités, et ayant pour but d'illustrer par des exemples numériques les propositions générales des anciens, il fait probablement à cet égard ce qu'on avait déjà eu en vue en établissant les propositions générales. Il n'y a guère que Diophante qui nous apprend comment les Grecs ont traité des questions concrètes et numériques sans les ramener à des propositions abstraites et générales — seules ses dénominations géométriques rapellent encore la forme géométrique de ces propositions. C'est ainsi qu'il nous apprend directement la formation d'équations à une seule inconnue, et grâce aux notations mentionnées à la page 1 il sait représenter ces équations sans faire usage des formes géométriques ni des proportions continues (voir p. 24). Malheureusement nous ignorons jusqu'à quelle époque remonte une telle formation directe des équations; mais l'étendue et la grande variété des questions algébriques auxquelles elle se trouve appliquée dans l'ouvrage de Diophante montre qu'il ne se s'agit pas d'un progrès individuel, mais bien des fruits d'un long développement. Je ne crois pas que celui-ci a eu lieu en opposition avec la géométrie mais plutôt sous l'abri des anciennes démonstrations géométriques d'un caractère général. C'était à elles qu'il fallait avoir recours pour assurer, par exemple, la justesse et la généralité de la solution des équations du second degré; on s'en est servi à peu près comme nous employons aujourd'hui les formules algébriques. En même temps qu'on assurait ainsi les opérations dont on se servait pratiquement, on faisait, successivement, de nouvelles observations et inventait de nouveaux artifices, qu'après le temps des grands géomètres on ne savait plus condenser dans des théorèmes et problèmes généraux, bien formulés et exactement démontrés, susceptibles en un mot d'être exposés dans des ouvrages que la postérité aurait pu conserver et commenter à côté de ceux des premiers géomètres alexandrins. C'est pour cette raison que du long intervalle entre Euclide et Diophante le nombre est singulièrement restreint des ouvrages conservés qui nous semblent préparer directement les recherches dont Diophante nous fait connaître les fruits et qui puissent servir à illustrer la connexion entre la géométrie scientifique et les progrès des procédés pratiques. Déjà Cantor et surtout P. Tannery ont attiré l'attention sur ces ébauches éparses des doctrines de Diophante. Je me bornerai donc à en citer deux exemples pour y signaler la connexion que cette préparation a eu avec la géométrie grecque et l'algèbre qui s'y était rattachée.

Comme premier exemple je citerai la détermination, déjà mentionnée à la page 39, de la valeur des termes des différentes médiétés, c'est-à-dire de la formation de certaines équations du second degré à racines entières. Il s'agit ici de la solution générale de questions du même ordre que les questions plus concrètes dont Diophante s'occupe, en se contentant toutefois d'obtenir des solutions rationnelles.

Notre second exemple est tiré de la collection de questions jointe aux éditions des ouvrages de Héron et conservée dans le livre dit *geponicus*, et dont M. Heiberg a publié un texte plus exacte.[1] Les questions indéterminées résolues dans cette collection sont de la même nature que celles dont s'occupe Diophante; leur invention et solution ont demandé une habitude assez développée de manipulations algébriques; mais, de même que le fait ordinairement Diophante, on se contente d'en trouver des solutions, sans s'assurer que les solutions trouvées sont les plus générales. Nous y signalerons pourtant un emprunt fait à la théorie générale d'Euclide. Dans la solution d'un de ces problèmes indéterminés, on invoque le fait que la surface d'un triangle rectangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, doit être divisible par 6. La connaissance de ce fait a du être tirée de la solution générale de l'équation indéterminée $x^2+y^2=z^2$, qu'on trouve dans Euclide X, 28 Lemme 1, et que nous avons rappelée à la page 18. Cette solution conduit à l'expression suivante de la surface aux côtés x, y, z:

$$\frac{1}{4}c^2mn(m-n)(m+n),$$

[1] Voir Heiberg und Zeuthen: Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik (Bibliotheca mathematica 8[3]).

dont on remarque sans difficulté la divisibilité par 2 et 3 et par conséquent par 6.

IV. Approches de la géométrie analytique; théorie des sections coniques.

Le plus grand témoignage que nous ayons de l'importance de l'algèbre grecque, de son état élevé de développement et de sa portée scientifique, c'est la théorie des sections coniques que nous révèlent déjà les applications, qu'Archimède fait de ces courbes, et dont nous apprenons à connaître l'enchaînement complet à travers la grande œuvre d'Apollonius. Je m'en suis occupé dans un traité, publié en 1885 en danois dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark (t. III de la 6e série, section des sciences) et dont ensuite une traduction en allemand a paru en 1886 (Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen, A. F. Høst & Søn).

Le but que je me suis proposé dans ce travail était de retrouver les méthodes grâce auxquelles les anciens Grecs avaient pu parvenir à des résultats que la géométrie moderne n'a reconquis qu'assez lentement. A cet effet, il fallait fixer l'attention sur les idées directrices de démonstrations qui semblent souvent à un mathématicien moderne assez pénibles à suivre, mais qui doivent avoir été plus familières aux lecteurs anciens d'Apollonius; sinon il n'en aurait pas trouvé. La nature géométrique des démonstrations, qui leur donne une forme si différente des considérations algébriques modernes, pouvait porter à en chercher une clé géométrique en se demandant si les anciens n'auraient pas eu recours aux considérations stéréométriques, fondées sur la théorie de la perspective que, dans les temps modernes, Desargues, Pascal et, plus tard, Poncelet ont utilisées avec tant de succès. Il n'en est rien: dans l'antiquité, la recherche stéréométrique des propriétés des coniques se bornait essentiellement au strict nécessaire et l'usage qu'on en faisait jouait un rôle assez inférieur à celui des considérations planimétriques. L'idée de faire des propriétés des foyers le point de départ d'une étude géométrique de ces courbes, comme l'ont éssayé Steiner et Zeuthen dans le siècle passé, n'a pas non plus été utilisée par les anciens auteurs. Faut-il donc croire que nous ayons perdu complètement la connaissance de voies qui avaient conduit autrefois à la découverte de résultats si importants et généraux, voies que nous devrions alors nous empresser de retrouver? Non. L'algèbre moderne et la géométrie analytique, qui nous servent ajourd'hui à établir les mêmes résultats sont dues elles-mêmes à un développement ultérieur et à une transformation importante des procédés antiques, transformation due à la substitution des symboles algébriques modernes aux figures géométriques qui servaient dans l'antiquité à marquer des opérations semblables. C'est pourquoi un mathématicien moderne peu accoutumé à la forme géométrique de l'ancienne algèbre saisira mieux l'idée directrice d'une démonstration d'Apollonius au moyen d'une traduction dans la langue algébrique qui lui est plus familière; après quoi il comprendra aussi la manière dont il fallait exprimer alors une démonstration analogue.

C'est par une analyse de la théorie grecque des sections coniques que je suis conduit à voir comment la géométrie grecque sert d'organe à une algèbre assez développée pour fournir les moyens de construire une théorie aussi élevée, théorie qui fournit de son côté un développement ultérieur de l'organe qui avait servi à la construire. De cette algèbre géométrique, dont la grande portée m'était apparue dans ses applications à la théorie des coniques, je devais chercher les fondements et les applications antérieures dans les Éléments d'Euclide et ailleurs. C'est cette analyse historique que j'ai essayé de reporter ici le plus loin possible afin de construire dans le présent travail une synthèse du développement successif de l'algèbre grecque depuis ses premières origines jusqu'à ce qu'elle ait atteint, dans la théorie des coniques, sa culmination. Comme d'ailleurs on trouvera la plupart des observations que je pourrais faire au sujet de cette théorie grecque dans mon ouvrage déjà cité, je me bornerai à présent à en tirer assez pour faire ressortir le rapport de liaison qui la rattache au développement algébrique antérieur dont je viens de m'occuper ici.

Les procédés suivis dans le traité des coniques d'Apollonius ont été préparés par les opuscules du même auteur dont nous avons déjà parlé. L'usage direct des différentes »sections« dont il s'occupe dans trois d'entre eux, se rapporte certainement à des propositions particulières du livre III, et j'en ai parlé dans les chapitres XV et IX de mon livre cité, mais, à côté de cela, la discussion très détaillée que dans ces opuscules Apollonius entreprend de problèmes généraux qui dépendent d'équations du second degré a dû préparer ses élèves à ne rien oublier de ce que demande une telle discussion. L'uniformité de son exposé des différents cas leur aura donné une idée des principes généraux qu'on poursuit partout, et ils auront été ainsi mis en état de bien saisir la généralité des points de vue qu'il prend ensuite dans son traité des coniques, et que lui permet la considération, inventée par lui, des »deux hyperboles opposées« — c'est-à-dire des deux branches d'une hyperbole — comme parties d'une seule courbe. Cette généralité se trouve exprimée de façon formelle quand il énonce, comme il le fait souvent, des théorèmes concernant »une section conique, ou une circonférence de cercle, ou des sections opposées«, c'est-à-dire ce que nous appelons aujourd'hui une conique quelconque. Toutefois, à défaut de la notion moderne d'un »point à l'infini« il ne lui a pas été possible d'obtenir toujours une telle généralité formelle: mais alors les lecteurs des dits opuscules auront été habitués à n'oublier aucun des cas différents qu'il fallait considérer à part. Ils auront été accoutumés à voir la nécessité de délimitations (»diorismes«) exactes et à remarquer l'importance des maxima et minima qui en résultent, ainsi que l'utilité d'une indication des nombres de solutions qu'on trouve dans les différents cas, et à comprendre ainsi certains avantages des théorèmes généraux. Apollonius signale plusieurs fois dans ses préfaces aux divers livres de ses Coniques ces avantages, qui se rattachent non seulement à la solution des problèmes dits plans (qui dépendent d'équations du second degré) mais aussi aux solutions des problèmes, appelés solides, que l'algèbre moderne fait dépendre d'équations du 3^e^ (ou 4^e^) degré, et dont les anciens obtenaient au moyen des coniques une solution sous forme géométrique.

D'une manière plus directe que dans les dits opuscules, Apollonius a préparé dans ses deux livres sur *les lieux plans* les procédés dont il fait usage dans son traité des sections coniques. Les Grecs appellent »plan« tout lieu géométrique qui est une droite ou un cercle. Dans le dit opuscule, dont nous connaissons le contenu par la mention qu'en fait Pappus et par les lemmes qui doivent selon le même auteur servir d'appui aux démonstrations qui s'y trouvent[1], APOLLONIUS s'attache moins à énumérer — comme le fait J. PETERSEN dans ses Méthodes et Théories — les lieux de cette nature qui sont les plus utiles pour inventer des constructions élégantes au point de vue géométrique, qu'à trouver des critères, de la même nature que ceux que nous fournit à présent la géométrie analytique, pour décider si un lieu géométrique est plan.[2] Le théorème I, 6 énonce par exemple, abstraction faite de quelques généralisations qui ne nous intéressent pas à ce point de vue, que le lieu d'un point dont les distances de deux droites données satisfont à une équation du premier degré, est une droite, et la généralisation, contenue dans le théorème I, 7, où les deux droites sont remplacées par un nombre quelconque de droites, montre qu'on a su profiter de la forme linéaire de cette équation.

De même, les lieux traités dans le livre II montrent qu'APOLLONIUS a très bien su profiter de cette propriété d'un cercle que la somme des carrés des projections des rayons sur deux axes orthogonaux a une valeur constante, propriété identique à celle que nous exprimons de nos jours par l'équation du cercle rapporté aux mêmes axes. Grâce à cette propriété d'un cercle quelconque il a su démontrer le théorème assez général (II, 5) qui énonce que le lieu d'un point M tel que la somme des surfaces de figures semblables à des figures données, et construites sur les droites joignant M à un certain nombre de points fixes, aient une valeur donnée, est un cercle.

C'est l'essai de démontrer les théorèmes généraux que nous avons rappelés ici qui a suggéré à FERMAT l'idée de

[1] PAPPUS ed. HULTSCH pp. 660—671 et 852—865.

[2] Voir le chap. X de ma Théorie des coniques dans l'antiquité, et, pour les renvois à FERMAT, ma Note sur les coordonnées dans l'antiquité (Bulletin de l'Académie de Danemark (1888)).

faire usage de coordonnées orthogonales, invention qu'il faisait indépendemment de DESCARTES. Guidé par la mention que font APOLLONIUS et PAPPUS des »lieux à trois ou quatre droites«, il appliquait ensuite les coordonnées à l'étude des sections coniques. Nous y voyons un signe qu'en réalité, malgré la grande différence des symboles algébriques, APOLLONIUS de son côté a poursuivi, dans ses démonstrations des mêmes résultats, dont nous connaissons seulement ses énoncés, des idées semblables à celles que dans la géométrie actuelle on exprime au moyen de l'algèbre moderne.

Dans la géométrie antique, ce qu'on appelait le symptôme d'une courbe jouait le même rôle que, de nos jours, son équation. Seulement, celle-ci s'exprime pas nos symboles algébriques, tandis que le symptôme ancien exprimait une propriété des points de la courbe sous une forme géométrique où, par exemple, les produits de deux facteurs étaient remplacés par des rectangles. L'usage de tels symptômes convenait bien à la manière dont on réduisait la recherche d'une quantité inconnue à celle de l'intersection de deux lieux. Il est probable que d'abord on a eu en vue la construction mécanique qu'on obtient de cette manière: dans les cas des problèmes dits plans, où les constructions peuvent être exécutées au moyen de la règle et du compas, elle a une grande valeur pratique que certainement on a apprécié toujours comme nous le faisons actuellement; mais les constructions mécaniques (ou par un certain nombre de leurs points) d'une quadratrice, d'une spirale d'ARCHIMÈDE, d'une conique, d'une conchoïde ou d'une cissoïde ne sont ni assez simples ni assez exactes pour avoir été destinées à des buts pratiques:[1] c'était en formulant bien

[1] L'usage de la conchoïde remplace sans doute les intercalations (νεύσεις) pratiques dont nous avons parlé, et on nous relate comment

les symptômes de ces courbes, de même que ceux d'une droite ou d'une circonférence de cercle, qu'on avait le moyen de désigner rigoureusement les points d'intersection de deux courbes dont on connaissait les symptômes, ensuite leurs projections sur une droite, et par cela des quantités cherchées, — et qu'on pouvait s'en servir pour discuter les solutions des problèmes analytiques. On réduisait ainsi la détermination d'une racine d'équation, ou quantité qu'aujourd'hui nous ferions dépendre d'une équation à une inconnue, à la détermination de deux symptômes de courbes, ce qui correspond à la détermination de deux équations à deux inconnues.[1]

s'effectuait sa construction instrumentale, mais son étude fournit avant tout les moyens de discuter exactement les résultats. La division d'un arc de cercle et la rectification et la quadrature d'un cercle s'obtiennent plus facilement et aussi exactement pour la pratique par des essais ou par tels moyens mécaniques dont se servaient déjà les Égyptiens que par l'usage d'une quadratrice ou d'une spirale.

[1] C'est un tel emploi théorique qui a donné leur véritable valeur aux solutions obtenues au moyen d'intersection de courbes, — ce que la postérité n'a pas toujours observé.

Après avoir complété la solution d'équations du 3e degré d'une manière qui la fait dépendre numériquement soit de l'extraction de racines cubiques soit de l'usage de tables trigonométriques, Viète fait remarquer que par ces procédés on la réduit aux deux opérations suivantes, dont l'exécution sous forme géométrique avait occupé les anciens, savoir à la détermination de deux moyennes proportionnelles et à la trisection de l'angle. Il est permis de voir dans cette remarque de Viète une conséquence naturelle de la continuité du développement de la mathématique; mais l'exécution géométrique des dites opérations, qui se faisait au moyen de sections coniques, allait perdre son intérêt devant l'usage immédiat des nouvelles découvertes dues aux prédécesseurs italiens de Viète et à Viète lui-même. Nous comprenons aussi que Descartes et ses contemporains aient été contents de joindre à leurs solutions d'équations du 3e et du 4e degré des solutions où, comme les anciens, on fait usage de l'intersection de sections coniques, et d'appliquer la géométrie analytique à inventer des solutions constructives d'équations de degrés supérieurs où l'on fait usage de l'intersection de courbes supérieures. Et pourtant les véritables progrès obtenus par leur nouvelle algèbre

C'est à un tel usage que se rapporte la première mention directe des sections coniques qui nous soit conservée (Voir le chap. XXI de mon livre ci-dessus cité). Déjà Hippocrate de Chios avait réduit le célèbre problème de la duplication (ou multiplication du cube, soit la résolution de l'équation cubique pure), à la détermination de deux moyennes proportionnelles, réduction conforme, du reste, à la représentation exacte et générale des puissances dont se sert Euclide (voir p. 24). C'est ainsi que la racine $x = \sqrt[3]{a^2 b}$ sera déterminée par les proportions

$$a : x = x : y = y : b, \tag{1}$$

ou bien par les équations

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \quad xy = ab. \tag{2}$$

En représentant ces quantités, à la manière des anciens, au moyen de rectangles et de carrés, on réduira le pro-

tendaient à rendre superflues les représentations géométriques dont s'étaient servis les anciens au même effet.

Moins innocente est une autre conséquence de l'adhésion aux formes antiques. Même là où on poursuit des buts pratiques, on préfère jusqu'à nos jours à toute autre une exécution graphique à laquelle les anciens donnaient la préférence à cause de ses avantages théoriques: à ce point de vue elle se trouvait être la plus rigoureuse, parce qu'elle se fondait sur des définitions et des postulats bien formulés, tandis qu'au point de vue pratique ni l'une ni l'autre exécution mécanique n'est d'une exactitude absolue. En se servant toujours d'intersections de courbes, on a poussé dans nos écoles de dessin technique la finesse des tracés et l'exactitude des constructions, non seulement de droites et de cercles, mais aussi des courbes réunissant des points construits, jusqu'à une excellence qui procure aux constructions exécutées par ces moyens une exactitude satisfaisant même les exigences sévères de la technique de nos jours; mais en présence de ces moyens on a négligé d'habituer en même temps les élèves aux autres moyens techniques qui amèneraient souvent plus facilement une plus grande exactitude: on a laissé aux élèves le soin d'en inventer eux-mêmes, soit pour contrôler les constructions exécutées par les moyens obligatoires, soit pour les substituer à celles-ci par une sorte d'escroquerie. Il était donc temps que M. Hjelmslev rendît compte dans son ouvrage intitulé *Geometriske Experimenter* (Kjøbenhavn 1913) des moyens dont le dessinateur technique devra se servir à côté de ceux qui ont été regardés jusqu'à présent comme obligatoires.

blème à la détermination d'un point (x, y) tel que les figures formées par les segments x, y, a et b, où a aussi bien que x est une abscisse, b comme y une ordonnée, aient les relations (2). Chacune d'elle sera le »symptôme« d'une courbe, et deux d'entre elles déterminent par leur intersection le point (x, y) et par suite la quantité cherchée x.

Tout cela est une conséquence de la manière dont les anciens représentaient les produits, et de leur usage de courbes bien définies dont nous venons de parler; mais c'est à Ménechme qu'on doit l'observation que les mêmes courbes sont des sections d'une cône à base circulaire. Cette observation lui a été très utile, au point de vue théorique, dans ses efforts pour réduire autant que possible le nombre des définitions et postulats géométriques (voir mon mémoire sur la Réforme p. 39—46). Elle lui permettait, en effet, de rattacher la véritable existence des courbes (2) à celle des cercles. Il ne s'agissait donc pas pour lui de rechercher, dans un but géométrique, la nature des sections planes d'un cône ou d'un cylindre circulaire — l'ancienne designation de l'ellipse sous le nom de »thyreos« semble du reste indiquer que déjà avant lui on s'était occupé de l'étude géométrique de ces sections —; ce qu'il voulait démontrer c'était que les courbes qui l'intéressaient à cause de leur application algébrique appartiennent bien à cette catégorie de courbes qu'on avait déjà rencontrées dans la stéreotomie. On comprend donc que ni Ménechme ni ceux qui avant Apollonius s'occupaient particulièrement de l'étude des sections coniques ne se soient souciés des propriétés de toutes les sections d'un cône circulaire quelconque: il leur suffisait d'avoir représentées comme sections coniques les courbes dont on faisait un usage algébrique, usage auquel se rattachait alors une étude planimétrique de plus en plus détaillée des mêmes courbes. Voilà pourquoi on pouvait se contenter de considérer les sections faites à des cônes droits par des plans perpendiculaires à une génératrice. Cette restriction n'a pu être due aux difficultés que pourrait causer l'étude d'autres sections, difficultés qui n'auraient différé en rien de celles qu'on avait déjà surmontées pour connaître les sections particulières dont on se servait pour avoir un point de départ bien fondé des recherches sur les courbes planes introduites en vue de leur usage algébrique. L'introduction au livre d'Archimède sur les conoïdes et sphéroïdes nous apprend en effet les moyens dont on se servait alors pour trouver les propriétés planes des sections, et Archimède, qui en a besoin pour ses propres recherches géométriques, les applique aussi à d'autres sections d'autres cônes (Voir le chapitre II de mon livre cité). C'est donc moins une nouvelle découverte que le désir de se placer à un point de départ aussi général que possible qui à porté Apollonius à commencer son traité général de ces courbes par la considération d'une section plane quelconque d'un cône circulaire quelconque.

En même temps, Apollonius maintenait ou plutôt soulignait la nature algébrique du symptôme planimétrique d'une conique. D'après ce que nous apprend le livre cité d'Archimède, on s'était servi jusqu'alors, pour rapporter une ellipse ou hyperbole à deux diamètres conjugués, de la relation

$$\frac{y^2}{x x'} = \text{constante},$$

où y est l'ordonnée rapportée à ces axes de coordonnées, x et x' les segments interceptés sur l'axe des abscisses entre cette ordonnée et ses intersections avec la courbe. C'est le même symptôme qu'Apollonius a eu l'idée de rapprocher de la forme antique d'équations du second degré. En effet, si l'on désigne la longueur du diamètre par a et la valeur constante du rapport par $\frac{p}{a}$, on peut énoncer l'équation

$$y^2 = px \mp \frac{p}{a} x^2,$$

correspondant respectivement à l'ellipse, pour laquelle on aura $x' = a - x$, et à la branche d'hyperbole voisine du terme du diamètre que nous avons pris pour origine des x, pour laquelle on aura $x' = a + x$. Alors le carré y^2 doit être égal à un rectangle appliqué sur la droite p de telle sorte que le rectangle en défaut (ellipse) ou en excès (hyperbole) soit semblable à un rectangle aux côtés p et a. Les opérations servant à déterminer les deux quantités x et x' correspondant à une valeur donnée de y seront donc les mêmes qu'Euclide prescrit dans VI, 28 et 29 pour une parabole en ellipse ou en hyperbole. Voilà l'origine des noms que, depuis Apollonius, portent les deux courbes en question. Quant aux hyperboles, à défaut de nos signes modernes, il fallait appliquer l'opération mentionnée à chacune de ses deux branches séparément, ce qui n'empêchait pas de les regarder comme parties d'une seule courbe. La courbe $y^2 = px$ a reçu le nom de parabole parce qu'ici x est le côté du rectangle résultant d'une simple parabole du carré y^2 sur p.

Il faut remarquer qu'indépendamment de l'angle que fait le diamètre avec les ordonnées (demi-cordes) la figure auxiliaire servant à représenter l'équation que nous avons écrite ici sous forme algébrique moderne, se compose de rectangles. Cette indépendance de la figure géométrique dont elle sert à représenter les propriétés algébriques, fait paraître sa nature d'instrument algébrique. Le résultat de la transformation de coordonnées, grâce à laquelle on rapporte la même courbe de la même manière à un nouveau diamètre, s'exprime par une nouvelle figure orthogonale de la même nature.

Dans mon livre déjà cité, j'expose comment, en partant des symptômes planimétriques des coniques que nous avons décrits ici, Apollonius établit les propriétés de leurs diamètres conjugés, axes, tangentes, asymptotes, foyers, de pôles et polaires, aussi bien que l'égalité des rapports des produits des segments qu'elles interceptent sur les jambes de deux angles à jambes parallèles (théorème appelé plus tard celui de Newton) et même certains théorèmes essentiellement identiques à ceux qui expriment comment on engendre les coniques au moyen de faisceaux projectifs. Dans mon livre, j'ai signalé les analogies que, malgré leur forme géométrique, beaucoup des opérations d'Apollonius présentent avec les procédés algébriques dont on se sert aujourd'hui dans la géométrie analytique; d'autres font pourtant un usage plus direct des résultats géométriques déjà acquis.

En même temps qu'Apollonius profite de l'algèbre géométrique qui existait déja, la nouvelle théorie qu'il développe met à sa disposition de nouveaux moyens algébriques, si toutefois on regarde comme algébriques les solutions dépendant de l'intersection de deux coniques suffisamment déterminées (voir p. 61). Comme moyens de trouver des valeurs numériques, ces solutions laissent beaucoup à désirer; mais pour discuter les problèmes et distinguer des cas où elles sont possibles ou non et trouver ainsi des maxima et des minima, les solutions de cette nature présentent des avantages semblables à ceux de l'algèbre moderne. A ces discussions servaient les déterminations des tangentes, qui permettent de trouver les conditions de contact des deux coniques dont les intersections fournissent la solution d'un problème. Ce sont de telles discussions qu'Apollonius signale, lorsqu'il parle de l'utilité de ses théorèmes pour les diorismes ou délimitations. A côté de cela, il préconise les théorèmes de son livre III comme étant particulièrement utiles pour trouver les solutions de problèmes solides au moyen de lieux solides, dont la nature très générale ressort soit des théorèmes soit des lieux qu'il cite à titre d'exemples. En déterminant, dans le livre IV, le nombre maximum des intersections de deux coniques — y compris l'ensemble de deux branches d'une hyperbole — il fournit un moyen général d'indiquer le nombre total des solutions d'un problème solide.

Cependant, dans les quatre premiers livres de l'œuvre d'Apollonius, destinés à contenir les éléments de la théorie des coniques, c'est-à-dire un exposé systématique de leurs propriétés, on ne trouve pas encore la solution et la discussion directe de problèmes solides concrets ni la détermination des lieux solides dont on y fait usage. Ces solutions et déterminations sont donc réservées pour des recherches particulières. On en trouve une des plus belles dans le livre V, où il s'occupe de la recherche des normales à une conique qui passent par un point donné. Il les détermine (voir le chap. XIII de mon livre cité) au moyen des intersections de la conique avec un autre lieu solide. Malgré son élégance géométrique une telle solution ne possède pourtant pas la régularité d'une solution algébrique moderne, qui fait dépendre le problème d'une seule équation à une seule inconnue, tandis que l'usage de deux lieux solides laisse une plus grande liberté au choix de l'inventeur. Il nous est pourtant conservé une solution d'un autre problème solide que — de même qu'on avait réduit déjà les problèmes plans à des équations du second degré — on réduit à une équation mixte du troisième degré, qu'ensuite on résout par l'intersection de deux coniques. C'est, en effet, une solution de ce genre qu'on a donné à un problème d'Archimède, demandant de diviser par un plan une sphère en deux segments qui aient un rapport donné. Archimède réduit (Sur la sphère et le cylindre II, 4)[1] le problème à la »section« qui décompose une droite (a) en deux parties (x et $a-x$) telles que

$$\frac{x^2}{b^2} = \frac{c}{a-x}, \tag{1}$$

où b et c ont des valeurs données. Archimède réserve la solution de ce dernier problème »pour la fin« du même livre mais remarque déja ici qu'en général il »a un diorisme«, qui est d'ailleurs sans importance pour son application au problème particulier considéré. La fin promise du livre était toutefois perdue dès une époque assez reculée; mais Eutocius croit l'avoir retrouvée dans un ancien manuscrit dont il a restitué le contenu, qui est l'une des plus intéressantes recherches conservées de la géométrie grecque[2]. Placé à la fin du livre d'Archimède il aurait pu servir aussi à résoudre la question suivante: trouver un segment de sphère dont le volume et la surface courbe sont donnés, question qu'Archimède ne propose pas directement, mais le dernier théorème de la partie conservée du même livre II en énonce le diorisme qui, suivant la coutume des anciens, devait précéder le problème. Tandis que dans II, 4, l'équation est exprimée par la proportion (1), elle prend plusieurs fois

[1] Voir le chap. XI de mon livre cité et ma ›Note sur la résolution géométrique d'une équation du troisième degré par Archimède‹ (Bibliotheca Mathematica 7 [2] (1903)). J'y expose quelques raisons qui me paraissent militer en faveur de l'attribution à Archimède lui-même du manuscrit retrouvé et restitué par Eutocius.

[2] Archimedis Opera, éd. Heiberg III (première édition) p. 154 s.

dans le manuscrit d'Eutocius la forme d'une égalité de deux volumes

$$x^2(a-x) = b^2c, \tag{2}$$

ou bien on dit qu'il s'agit de partager un segment de droite (a) en deux segments tels que le parallélépipède ayant pour base le carré (x^2) sur l'un, pour hauteur l'autre, ait un volume donné. On remarquera bien l'analogie de cette forme d'une équation du troisième degré avec celle que depuis les Pythagoriciens on donnait à une équation du second degré.

La solution se rattache du reste à la forme (1) de l'équation. Si l'on égale les deux rapports de cette proportion à $\frac{y}{e}$, où e est une quantité arbitrairement donnée, on trouvera le point (x, y) par l'intersection de deux coniques:

$$b^2y = ex^2 \quad \text{et} \quad y(a-x) = ce.$$

Grâce aux propriétés connues des tangentes des deux coniques, on trouve ensuite que le volume $x^2(a-x)$ aura sa valeur maximum si $x = \frac{2a}{3}$, et que le problème aura 2, 1, 0 solutions (positives) suivant que le volume donné est $\lesseqgtr \frac{4}{27}a^3$.

C'est aux mêmes questions que se rattachent les solutions arabes d'équations du 3e degré au moyen de deux sections coniques. Al Kûhî applique la méthode aux mèmes questions dont nous venons de parler, y compris celle de trouver un segment sphérique dont on connaît le volume et la surface courbe, et par ses discussions qui dépendent de la condition de contact des deux coniques dont il fait usage, il s'élève à la hauteur des auteurs grecs. Plus tard al-Chaijâmî a énuméré les différentes formes des équations du 3e degré et y a ajouté les règles pour leur résolution au moyen de sections coniques. Toutefois, en négligeant la distinction entre les différentes formes d'équations cubiques que sépare le cas où deux racines deviennent égales de la manière indiquée, distinction identique à celle qu'on a faite plus tard entre les cas dits réductible et irréductible, il ne semble pas avoir remarqué ce qui donne entre les mains des Grecs et d'al Kûhî une véritable valeur théorique aux solutions graphiques dont nous parlons. Peut-être l'énumération de l'auteur éloquent, al Chaijâmî, a-t-elle contribué d'autant plus à exciter le désir d'avoir des solutions d'une autre nature et à soutenir les efforts d'en trouver, jusqu'à ce que cela réussît aux Italiens du commencement du XVIe siècle.

D'ailleurs, les grands progrès des calculs numériques que l'usage du système indien de numération permettait aux Arabes ont contribué à rendre les opérations algébriques plus indépendantes, pratiquement, de la représentation géométrique. Al-Karchî, par exemple, opère avec des radicaux sans faire usage d'une telle représentation. Et les mêmes propriétés caractérisent la forme sous laquelle les opérations algébriques furent transplantées en Italie par Léonard de Pise.

Forelagt paa Mødet d. 24. Januar 1919.
Færdig fra Trykkeriet d. 11. Oktober 1919.